ANTONIO SALES[1],
LEANDRO INÁCIO DA SILVA[2]

[1]LICENCIADO EM MATEMÁTICA, MESTRE E DOUTOR EM EDUCAÇÃO. DOCENTE SÊNIOR EM PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSS DO SUL, BRASIL E PROFESSOR DE MATEMÁTICA NO CURSO DE LICENCIATURA DA UNIDERP-ANHANGUERA, CAMPO GRANDE, MS.

PROFESALES@HOTMAIL.COM

[2]LICENCIADO EM MATEMÁTICA PELA UNIDERP-ANHANGUERA, CAMPO GRANDE, MS. NA ÉPOCA DESTA EXPERIÊNCIA, ERA ESTUDANTE E PARTICIPOU DAS ATIVIDADES.

INACIOSILVABMB@GMAIL.COM

01

A MODELAGEM MATEMÁTICA EM UM CURSO DE LICENCIATURA: PERCALÇOS DE UM PROCESSO

MATHEMATICAL MODELING IN A LICENSING COURSE: PERCUSSIONS OF A PROCESS

RESUMO

O presente trabalho surgiu a partir de duas hipóteses sobre as dificuldades que os acadêmicos de Matemática-Licenciatura encontrariam para trabalhar com Modelagem Matemática; este é, portanto, o resultado em uma pesquisa desenvolvida com acadêmicos do último semestre do curso durante as primeiras aulas de Modelagem Matemática. O objetivo foi verificar como os acadêmicos produziriam modelos para resolver atividades envolvendo produtos notáveis e analisar a dificuldade em observar regularidades de segunda ordem e enunciar o padrão observado, embora tais objetivos estejam também expressos em forma de hipóteses. Fundamentou-se na teoria dos obstáculos tanto epistemológico quanto didático e conclui-se que a capacidade de observar regularidade e fórmulas modelos não está desenvolvida nesse nível de escolaridade.

Palavras-chave: regularidade de primeira ordem, obstáculos à aprendizagem, atividade intramatemática.

ABSTRACT

The present work arose from two hypotheses about the difficulties that Mathematics-Licentiate scholars would encounter to work with Mathematical Modeling; this is, therefore, the result of a research developed with academics of the last semester of the course during the first classes of Modeling Mathematics. The objective was to verify how academics would produce models to solve activities involving notable products and analyze the difficulty in observing second order regularities and state the observed pattern, although such objectives are also expressed in hypothesis form. It was based on the theory of obstacles (both epistemological and didactic), and it was concluded that the ability to observe regularity and model formulas is not developed at this level of education.

Keywords: first-order regularity, obstacles to learning, intramathematic activity

INTRODUÇÃO

Quem é professor ou acadêmico em curso de Licenciatura em Matemática carrega em si a certeza de que a qualquer momento ouvirá a pergunta: "para que serve isso?" Essa pergunta partindo de um acadêmico ou de um estudante da Educação Básica, que não tenha afinidade com atividades intelectuais, pode significar: "que relação tem isso no meu cotidiano?" A sua preocupação centra-se na resolução de problemas práticos que o afligem ou que possam facilitar a sua sobrevivência. Sentem a necessidade de dominar os recursos naturais para satisfazer as necessidades fisiológicas ou manipular as informações para ocupar a posição social almejada. Isso não é estranho uma vez que a necessidade de sobrevivência foi um dos fatores que motivaram o progresso da Matemática. (D´Ambrosio, 2008).

Porém, se a mesma pergunta parte de um estudante (ou acadêmico) que tem afinidade com atividades intelectuais, que estuda pela busca da transcendência, ela poderá significar outra coisa. Por exemplo, ela pode sugerir que ele esteja perguntando: de onde surgiu essa fórmula ou o que comprova a validade dessa técnica? Quais as relações que posso estabelecer entre ela e aquilo que estudo ou encontro exemplificado nos livros didáticos ou textos usuais de estudo? Quais as conexões que posso estabelecer entre esse tema estudado e outras ciências? Dessa forma, entende-se que a pergunta para "que serve" pode ter significados diferentes em contextos diferentes ou partindo de pessoas diferentes.

Um acadêmico de licenciatura em matemática não pode se furtar em pensar sobre essas questões porque muito provavelmente se tornará professor da Educação Básica. Se não deseja ser simples repetidor daquilo que aprendeu e tenha a curiosidade de responder para si mesmo essa inquietante pergunta dos estudantes, a partir das diversas perspectivas, levando em conta os múltiplos fatores que a motivaram, ele certamente se interrogará e interrogará ao professor da disciplina: "para que serve?".

Pensando dessa forma começamos a questionar: como os acadêmicos de matemática encaram as possíveis "aplicações" da matemática. Sejam "aplicações" em forma de uma explicação sobre como determinada técnica se desenvolveu, seja "aplicação" no sentido de utilização de uma fórmula em outros domínios do saber humano, ou ainda um "receituário" que possa apontar alternativas de sobrevivência. Para isso, neste trabalho, percorreremos as perspectivas para a presença da matemática na Educação Básica conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais. De igual modo, buscamos entender o que outros pesquisadores da área de Educação Matemática discutem sobre a forma de abordagem esse saber escolar em qualquer nível de escolaridade. A forma de abordar a Matemática num curso de licenciatura tem por objetivo preparar o futuro professor para fazer frente aos diversos desafios que poderão surgir no seu fazer docente, inclusive os desafios de ordem intelectual. A questão, portanto, é: como acadêmicos de matemática, na etapa final do curso, reagem intelectualmente diante de desafios de explicar ou "aplicar" a matemática que estuda e que terá que ensinar?

Aplicar neste texto, conforme já pontuado anteriormente, não significa, necessariamente, a utilização da Matemática como ferramenta para resolver problema de outros domínios, sejam eles sociais, econômicos, biológicos ou técnicos. Aplicação pode, sim, ser uma referência a essa visão da Matemática como ferramenta. No entanto, aplicar a Matemática significa mais do que usá-la como instrumento para avaliar e interferir em outros domínios. Refere-se também ao uso das suas propriedades como um argumento plausível para explicar ou justificar a sua própria estrutura.

É nessa perspectiva, de que uma pergunta do estudante pode sugerir ao professor múltiplos direcionamentos em sua abordagem, que este trabalho se pauta e é conduzido. O tema da Modelagem está em pauta porque se faz presente na turma de sexto semestre do curso de Licenciatura em Matemática em decorrência de uma mudança curricular.

Contudo, por ser um tema novo, algumas questões a respeito da sua abordagem foram formuladas, especialmente no que diz respeito a possíveis dificuldades dos estudantes. Uma hipótese levantada foi a de que eles teriam dificuldades para detectar regularidades e formular um modelo para elas. Outra hipótese consistiu em pressupor que eles teriam dificuldades em recorrer a conhecimentos prévios e fazer investimento deles para resolver problemas ou até mesmo de associar o problema proposto a um determinado conteúdo matemático já conhecido.

Esses pressupostos surgiram em decorrência das experiências pessoais dos autores quando em determinado momento se depararam coma necessidade de resolver problemas que envolviam regularidade e a habilidade de formular um modelo. Habituados a receber todos os indicativos do que deve ser feito, eles mesmos não tinham liberdade para ousar ou para supor a existência de outras possibilidades. Faltava-lhes o raciocínio conjetural.

O presente trabalho, portanto, tem por objetivo analisar as dificuldades apresentadas por acadêmicos do sexto semestre de um curso de Licenciatura em Matemática no estudo de Modelagem Matemática.

A experiência dos autores também revela que, na região onde atuam, predomina no ensino da Matemática o modelo tecnicista onde o aluno recebe as fórmulas e deve exercitar para que possa ter algum resultado na avaliação. Os professores revelam uma preocupação intensa com as avaliações externas, incluindo os concursos e os processos seletivos.

Segundo Gascón o modelo tecnicista se caracteriza pelo treinamento de técnicas. Consiste na aplicação de técnicas a problemas previamente formulados ou a repetidos exercícios de reforço. Trata-se de uma trivialização do fazer matemático. Nas palavras do autor:

> El modelo docente tecnicista identifica implícitamente "enseñar y aprender matemáticas" con "enseñar y aprender técnicas (algorítmicas)" por lo que constituye otra forma extrema de "trivializar el proceso de enseñanza de las matemáticas". Dado el énfasis tan exclusivo que pone en las técnicas "simples", el tecnicismo tiende a olvidar los "auténticos" problemas que son aquellos cuya dificultad principal consiste en escoger las técnicas adecuadas para construir una "estrategia de resolución". En este sentido puede decirse que el tecnicismo comparte con el teoricismo "cierto tipo de trivialización de la actividad de resolución de problemas". En el tecnicismo se parte de ciertas técnicas algorítmicas y se proponen unicamente aquellos abusiva del proceso de resolución ni de adjudicar a la actividad de resolución de problemas un papel auxiliar sino de una fijación tan fuerte en las técnicas elementales que impide tomar en consideración problemas matemáticos no rutinarios, ejercicios que sirven como "entrenamiento" para llegar a dominarlas; de esta forma se excluyen del repertorio de técnicas las estrategias de resolución complejas y no algorítmicas (Gascón, 2001, p. 135).

Essa prática tende a produzir obstáculos à aprendizagem da Matemática e pode também ser o principal fator de obstáculo à prática da modelagem.

Bassanezi admite a presença desse obstáculo ao afirmar que:

> O uso da modelagem foge da rotina do ensino tradicional e os estudantes, não acostumados ao processo, podem se perder e se tornar apáticos nas aulas. A formação heterogênea de uma classe pode ser também um obstáculo para que alguns alunos relacionem os conhecimentos teóricos adquiridos com a situação prática em estudo. O tema escolhido pode não ser motivador para uma parte dos alunos provocando desinteresse. (Bassanezi, 2002, p. 37).

Fugir da rotina em um contexto marcado ela presença tecnicista tem o seu preço. O desafio consiste em levá-los a superar obstáculos.

OBSTÁCULOS

Os obstáculos à aprendizagem de determinado conteúdo podem ser decorrentes de diversos fatores. Contribui para a compreensão desses fatores os estudos de Gaston Bachelard (1884-1962).

Um desses fatores é o próprio ato de conhecer, o seu mecanismo. Conhecer implica superar certos pressupostos, corrigir conhecimentos anteriores, admitir as limitações do que se sabe. Bachelard especifica o obstáculo epistemológico como aquele que decorre do próprio saber a ser apropriado pelo estudante. Determinados conteúdos são portadores de dificuldades próprias, inerentes ao conhecimento científico. No ato de conhecer subjazem dificuldades que não dependem de fatores externos e nem tem relação com o sujeito cognoscente.

> ... o espírito científico deve formar-se contra a Natureza, contra o que é, em nós e fora de nós, o impulso e a informação da Natureza, contra o arrebatamento natural, contra o fato colorido e corriqueiro. O espírito científico deve formar-se enquanto se reforma. (Bachelard, 1996, p. 30).

Outro obstáculo é denominado, pelo mesmo autor, de "experiência primeira" (Bachelard, p. 29). Tem a ver com o resquício do passado do sujeito, e da relação que estabelece com a realidade vivida, pois, "... Mesmo na mente lúcida, há zonas obscuras, cavernas onde ainda vivem sombras. Mesmo no novo homem, permanecem vestígios do homem velho" (Bachelard, p. 10). O real projeta sombras que obscurecem as próximas apropriações (Bachelard, p. 17). Superar uma opinião formada previamente é tarefa complexa e descartar evidências para fazer valer a razão requer esforço incomum.

Essa "experiência primeira" tende a estar fundamentada na certeza da completude do que se aprendeu no passado, seja na escola seja na experiência social. No entanto, o que se aprendeu pode ter sido fragmentado (o que dificulta juntar as partes agora) ou simplificado, para facilitar, de modo que ao vê-lo em sua complexidade o estudante pode recuar. Pode até mesmo ter sido aprendido corretamente, porém, estar marcado pela incompletude própria daquela etapa do conhecimento.

> É quando um conhecimento se torna obstáculo à aquisição de outro conhecimento. Esse conhecimento obstáculo é sempre o resultado da interação do estudante com o ambiente e precisa de uma situação que torna esse conhecimento interessante, diz Brousseau (1976, p. 107).

Outro obstáculo é a busca pela "generalização apressada e fácil" (Bachelard, 1996, p. 69). Ela costuma proporcionar prazer intelectual imediato e perigoso. A ideia de que toda Matemática necessária foi aprendida, e é como está posta, pode dificultar a busca por novos conhecimentos. A dificuldade para admitir que todo conhecimento corretamente construído, é eficaz em determinado momento, mas pode apresentar lacunas em estágios mais avançados, é um obstáculo.

A impaciência é tão própria de quem precisa estar preparado para a avaliação que toda instituição exige dos seus estudantes, é outro fator que dificulta aceitar a demora (muitas vezes necessária) pela busca de compreensão. Compreender demanda tempo que o estudante nem sempre dispõe.

Brousseau (1976) leva em contra também o interesse do estudante em investir no estudo do que está sendo proposto.

Esse mesmo autor destaca ainda o obstáculo de origem didática como aquele dependente da escolha de um projeto de ensino por parte do professor. A escolha de um modelo tecnicista pode resultar em muitos obstáculos ao progresso do estudante, uma vez que o tecnicismo considera a atividade matemática como treinamento e aplicação de algoritmos. Nessa perspectiva didática não há espaço para interpretação de problemas, discussão sobre processos alternativos de resolução ou observação de regularidades visando construção de um modelo matemático.

FINALIDADES DA MATEMÁTICA ESCOLAR

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática iniciam um dos seus parágrafos com a indicação clara de que se espera que os alunos da Educação Básica dominem mais do que números e operações. A razão é que esses fatores, eventualmente, podem ser reduzidos à pura memorização e aplicação de técnicas desprovidas de sentido. Pelo contrário, diz o documento, que devem ser orientados a buscar as "relações existentes entre eles", desenvolver a "capacidade de análise e de tomada de decisões" e tenham condições de "se manifestar" Embora o texto que se segue imediatamente nada fale sobre a natureza dessa manifestação, a continuidade do capitulo traz à tona que se trata da manifestação de uma forma de pensamento organizado pela observação de regularidades presentes na matemática e aplicabilidade dos modelos obtidos a partir dessa observação. Afirmam os elaboradores do referido documento que eles precisam ser levados "a elaborar algumas conjecturas e comunicar informações de modo convincente, a interpretar diagramas e fluxogramas". (Secretaria de Educação Fundamental, 1998, p. 63-70). Como uma atitude esperada, resultante desse desenvolvimento intelectual, está o "desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultados". (Secretaria de Educação Fundamental, p. 75).

Em outro momento consta no documento que:

> [...] a Matemática no ensino fundamental, [se justifica] pela proposição que evidencia a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. (Secretaria de Educação Fundamental, p. 15).

Também é necessário explorar o potencial crescente de abstração, decorrente do progresso intelectual esperado, fazendo com que os alunos justifiquem e relacionem, "criem" modelos. Essa é uma forma de fazer Matemática: explorar domínios novos para o sujeito. Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), essa forma de tratar a matemática no contexto escolar tem tanta importância quanto explorar novos domínios, para especialistas. Cada um (estudante da educação básica ou especialista) na sua esfera está produzindo Matemática.

É importante entender que a Matemática surgiu, por um lado, da necessidade sentida pela humanidade em resolver determinadas situações do cotidiano que na atualidade ainda se fazem correntes e, por outro lado, pela busca da transcendência, pelo interesse de perscrutar o desconhecido, superar as limitações humanas de analisar apenas o perceptível pelos sentidos, de ir além do que satisfaz os interesses imediatos ou necessidades de primeira ordem. (D'Ambrósio, 2008).

Nesse embate entre a compreensão do vivido com a respectiva criação de modelos explicativos e a busca pela exploração do ainda não vivido, surge a Modelagem Matemática.

O QUE É A MODELAGEM

Embora o termo seja amplamente conhecido entendemos que ainda há acadêmicos que não tenham ouvido falar dele. Definimos, portanto, a modelagem como o elo, de ligação entre os blocos de ensino matemático e a análise de padrões matemáticos que se apresentam de maneira interligadas. Quando são explicitadas as ligações entre as diversas áreas da matemática e sua aplicabilidade na vida cotidiana trazemos a matemática para próximo da vivência e a tornamos, contextualizada socialmente, para os estudantes. Há quem apresenta Modelagem Matemática como o fator que favorece a autonomia do aluno porque se interpõe entre ele e os fenômenos sociais, econômicos, biológicos ou físicos, facilitando o processo de construção do conhecimento.

> Modelagem matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob a ótica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose signficativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e tam-

> bém ter senso lúdico para jogar com as variávesi envolvidas. (Biembengut y Hein, 2003, p. 12).

Segundo Caldeira (2009), a Modelagem Matemática não deve ser utilizada apenas para justificar o conteúdo que está sendo ensinado, mas sim deve valorizar a razão, o motivo pelo qual o aluno deve aprender Matemática, e a importância que isto representa na formação dele como cidadão responsável e participativo na sociedade. Quando se recorre aos exemplos práticos apenas para justificar ou ilustrar o conteúdo que está sendo ensinado, tem-se o caso de problemas de aplicação ou rotineiros segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2008). Evidentemente que o termo, no contexto usado por esses autores, tem o sentido restrito de aplicação ilustrativa. Trata-se de aplicação do problema e não da Matemática, uma vez que se limita a um problema elaborado ou selecionado especialmente para essa finalidade. A Modelagem não se presta a essa função. O seu objetivo é desafiar o estudante a utilizar a Matemática para resolver problemas que muitas vezes ainda não estão formulados. Usam-se os conhecimentos matemáticos disponíveis para criar o modelo e propor a solução exata ou aproximada.

A modelagem matemática vem como resposta a uma necessidade de contextualizar e explicar uma vez que, através de situações problemas reais, podemos expressar a linguagem matemática. Para Bassanezi (2002), a modelagem pode ser entendida também como um método científico ou como uma estratégia de ensino-aprendizagem, que envolve uma prática educativa em matemática, em que o que interessa não é encontrar um modelo bem-sucedido, mas caminhar seguindo etapas a fim de que o conteúdo matemático seja sistematizado e aplicado.

Segundo Biembengut:

> [...] a criação de modelos para interpretar os fenômenos naturais e sociais é inerente ao ser humano. A própria noção de modelo está presente em quase todas as áreas: Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Literatura, Matemática. Aliás, a história da Ciência é testemunha disso! (Biembengut, 1999, p. 11).

Foi com essa perspectiva que o trabalho foi desenvolvido.

A METODOLOGIA

Esta pesquisa qualitativa se caracteriza como descritiva e analítica porque consiste em descrever e analisar o processo de estudo de matemática, envolvendo interpretação de enunciados, observação de regularidade, relação com algum conteúdo já estudado e investimento em busca de um possível modelo, por acadêmicos do sexto semestre de um curso de Licenciatura em Matemática.

Para isso recorremos aos conceitos de "questões intramatemáticas" e "questões extramatemáticas" propostos por Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 170) para falar de Modelagem Intramatemática e Modelagem Extramatemática conforme o tipo de problema que está sendo modelado.

Os problemas intramatemáticos originam-se na necessidade de resolver problemas gerados a partir do próprio estudo da Matemática e extramatemáticos são oriundos do contexto social, econômico ou outro contexto qualquer. (Sales, 2010).

De igual modo definimos regularidade imediata, ou de primeira ordem, e regularidade não imediata, ou de ordem superior a um, para nos referirmos à regularidade facilmente percebida e à regularidade não facilmente percebida, respectivamente. Esta última exige um olhar mais atento e, de alguma forma, previamente orientado, para percebê-la. A regularidade de primeira ordem pode ser percebida por qualquer pessoa que tenha um mínimo de curiosidade ou atenção.

A EXPERIÊNCIA

Problema proposto

A seguir estão algumas operações de multiplicação. Resolva todas elas, descubra um padrão comum a todas e forme um modelo único de resolução. Os produtos notáveis, tão conhecidos nossos, por exemplo, foram obtidos a partir da observação de regularidades durante a fatoração de expressões algébricas ou durante o desenvolvimento delas.

É possível encontrar um modelo único de resolução nas operações propostas a seguir? Por quê? Qual é esse modelo encontrado?

Os quadros a seguir trazem os exemplos

Quadro 1. Primeira atividade proposta

Original	1ª Ação Esperada
10x10=	10x10=100
9×11=	9×11=99
8x12=	8×12=96
7x13=	7×13=91
6x14=	6×14=84

A questão proposta se enquadra no perfil de modelagem intramatemática.

> O que foi observado pelos acadêmicos e revelado na discussão em sala:
> Na primeira coluna a sequência é decrescente com a diferença de uma unidade.
> Na segunda coluna a sequência é crescente com acréscimo de uma unidade.
> Na terceira coluna não viram regularidade.

Acontece que nas duas primeiras colunas a regularidade é de primeira ordem, facilmente observável.

> Na primeira coluna tem–se: 9=10-1; 8=9-1 ou 10-2, etc.
> Na segunda coluna tem–se: 11=10+1; 12=11+1 ou 10+2, etc.
> Na terceira coluna tem–se uma regularidade de ordem superior a um.

Uma questão formulada pelo pesquisador foi: descubra o elemento-chave. A intenção era que eles pensassem tudo em termos de $10 \pm x$, o que não foi conseguido no primeiro momento. Essa seria uma regularidade não imediata.

A outra ação esperada (e necessária) era que eles observassem na terceira coluna a seguinte regularidade não imediata (Quadro 2).

No quadro da esquerda (Quadro 2) tem-se como regularidade imediata que a segunda coluna é 100-a, onde a=(1, 4, 9, 16), isto é, 100 menos um certo valor.

Essa regularidade imediata foi observada, porém, não foi considerada como regularidade. Não foi percebido o acréscimo de uma unidade na base da potência (quadro da direita). Como também não foi percebida a possibilidade da diferença entre dois quadrados.

A prática de receber todas as orientações de procedimento, presente no modelo tecnicista comumente adotado no ensino da matemática, constituiu-se no obstáculo à observação especulativa necessária. A "experiência primeira" de ter os detalhes do procedimento explicitados e as respostas imediatas não proporcionam estímulos à investigação. O "desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados, valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultado" previsto nos PCN não se revelou presente, nesse primeiro momento.

Não se pode omitir, a essas alturas, a informação de que a atividade foi passada como desafio para ser entregue na próxima aula e que em sala de aula elas entrariam em pauta de discussão. Entregue a atividade houve um tempo de "provocação" e de espera por uma resposta e a primeira atividade foi resolvida. O estudante foi desafiado a resolver a atividade seguinte.

O que foi realizado na atividade extraclasse:
Salvo algumas exceções pode-se dizer que todos os 30 acadêmicos apresentaram a resolução. O que se percebeu foi uma redundância de procedimentos indicando uma produção coletiva. A figura a seguir (Figura 1) apresenta um excerto da resolução dessa questão.

Tendo observado uma sequência associou a um termo já conhecido a_n e fez n=(0, 1, 2, 3, 4, 5), isto é, a "distância", como expressou um acadêmico do ano de 2018, em relação ao número base.

Essa hipótese se confirma pela Figura 2 que tem parte da resolução da segunda atividade proposta.

Quadro 2. Exemplos de Regularidades Imediatas e não Imediatas

REGULARIDADE IMEDIATA	REGULARIDADE NÃO IMEDIATA
99=100-1	$99=100-1^2=10^2-1^2$
96=100-4	$96=100-2^2=10^2-2^2$
91=100-9	$91=100-3^2=10^2-3^2$
86=100-16	$86=100-4^2=10^2-4^2$

A segunda atividade era composta pela seguinte sequência de produtos não ordenados (Quadro 3).

Propositadamente a atividade proposta não seguiu uma sequência que tornasse imediata a regularidade. Para percebê-la os estudantes teriam que reorganizar a sequência que ficaria como segue e ainda completar, mesmo que apenas mentalmente, lacunas (em negrito) (Quadro 3- à direita):

Não houve essa iniciativa. Tal qual ocorreu na atividade anterior não se revelou presente o "desenvolvimento da capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados,

Padrão comum : an(10-n).(10+n), onde n=(0, 1, 2, 3, 5)

a) 10x10
n=0
a_0=(10-0).(10+0)
a_0=10·10

a) 9x11
n=1
a_1 =(10-1)·(10+1)
a_1 =9·11

c) 8x12
n-2
a_2=(10-2)·(10+2)
a_2=8·12

c) 7x13
n=3
a_3 =(10-3)·(10+3)
a_3 =7·13

Figura 1. Resolução da questão por um acadêmico
Fonte: Dados da pesquisa, 2017

Quadro 3. Segunda actividade

Como prosto	Como esperado
100×100=	100x100=
85×115=	99x101=
70×130=	98x102=
97×103=	97x103=
90×110=	: :
	. .
	90x110=
	85x115=
	70x130=

Padrão comum : an(100-n)·(100+n). onde n=(0,3,10,15)

a) 100x100
n=0
a0 = (100-0).(100+0)
a0 = 100·100

b) 85x115
n=15
a15 = (100-15)·(100+15)
a15 = 85·15

c) 70x130
n=30
a30 = (100-30)·(100+30)
a30 = 70·30

d) 97x103
n=3
a3= (100-3)·(100+3)
a3= 97·103

Figura 2. Resolução da segunda questão por um acadêmico,
Fonte: dados da pesquisa, 2017

valorizando o uso de estratégias de verificação e controle de resultado". Ocorreu a busca pela generalização apressada.

Há na terceira atividade (Quadro 4) uma regularidade de ordem superior à da atividade anterior. Naquela temos o elemento básico (100) evidente, enquanto nesta o elemento básico (50) está oculto. Para descobri-lo era necessário observar desde os anteriores que a soma dos elementos e qualquer linha é o dobro desse elemento básico.

Nesta atividade cujo elemento básico era 50 esperava-se que o estudante já tivesse percebido, nas atividades anteriores, a relação que há entre as soma dos fatores e o elemento-base. Por exemplo, 100+100=200, 85+115=200, etc., observação essa que fora provocada pelo enunciado e por falas do pesquisador que enfatizava: "observem regularidades presentes na atividade proposta".

Dada a forma como o trabalho foi conduzido esperava-se que nesta terceira atividade eles teriam elementos para discutir essas questões.

Quadro 4. Terceira atividade

45×55=
40×60=
48×52=
30×70=

Quando temos que $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$,
então $(x+y)+(x-y)=2x$

No ano letivo de 2018 a tarefa foi reapresentada, agora a um grupo de sete acadêmicos, os únicos presentes na primeira aula.

A primeira atividade (Quadro 1) foi proposta. Embora tivéssemos começado a aula apresentando a regularidade presente na sequência dos números pares naturais e dos números ímpares não houve manifestação espontânea de nenhum dos presentes mesmo após alguns minutos disponíveis para a discussão entre eles. Foi então destacada a ordem decrescente da primeira coluna e crescente na segunda coluna. Depois de algum tempo um acadêmico destacou que a sequência da terceira coluna obedecia a seguinte ordem: a diferença entre os números aumentava na mesma proporção dos números ímpares. Dessa forma, 100-99=1, 99-96=3, 96-91=5; 91-84=7 e, assim, sucessivamente. A sequência seria: (1,3,5,7, ...) (Quadro 5).

Quadro 5. Regularidade observada na terceira coluna

10×10 = 100
9×11 = 99
8×12 = 96
7×13 = 91
6×14 = 84
5×15 = 75

O quadro foi completado como se vê na foto (Figura 3) e o destacar que deveriam observar a diferença em relação ao 100 e em termos de um valor. Ao quadro o acadêmico acrescentou uma coluna à esquerda com os números de zero a 10 (Figura 3).

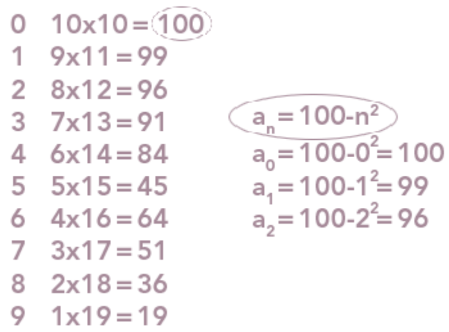

Figura 3. Atividade proposta em 2018
Fonte: Dados da pesquisa, 2018

Como o objetivo era que chegassem à expressão 10^2-n^2 foi sugerido que pensassem em termos de 100 menos um número ao quadrado. Foi então que ele criou uma coluna à esquerda com os números 0, 1, 2, ..., 9 que, no seu entender, seriam os índices de a (a_0, a_1, a_2, ... a_9).

Pensando em $100-n^2$, ele vinculou n ao índice de a.

O procedimento é recorrente uma vez que na figura 1 vê-se procedimento semelhante.

Como forma de induzi-los a pensar em termos do que está no quadro 2, falou-se que a coluna criada à esquerda poderia ser um problema se aparecesse uma sequência não ordenado como nos quadros 3 e 4. Foi então proposto o que se vê a seguir (Figura 4):

Figura 4. Atividade proposta em 2018

35×65=
20×80=
49×51=
41×59=

Um segundo acadêmico que até então permanecera em silêncio afirmou que uma vez encontrado o número base que nesse caso é 50 bastaria saber a "distância de cada número a essa base" e ilustrou: "20 é 50-30 e 80 é 50+30".

Solicitado foi ao quadro e expressou a^2-n^2.
Foi-lhe perguntado: Quem é a?
Resposta: 50
P: Quem é n?
Resposta: a distância

O seu pensamento pode ser expresso em termos de uma reta numerada onde o número base é o ponto de referência. Dessa forma tem-se: 50 ± 30, para o par (20, 80) da segunda linha (Figura 4).

Foi pedido que expressasse as demais distâncias da tabela e ele após um breve período de cálculo mental respondeu: 15, 1 e 9.

De alguma forma observa-se que a experiência primeira que o estudante tem de receber todas as orientações de procedimentos a serem adotados se tornou evidente nessa experiência. Mesmo o acadêmico no final do curso de Matemática--Licenciatura se mantém preso o "aluno velho" que não se desgarrou do seu passado. Mas neste caso esse obstáculo tem a sua origem na didática, na forma de conduzir um processo de estudo. É, portanto, um obstáculo didático.

Do mesmo modo, a dificuldade de observar regularidades de ordem superior se evidenciou tornando-se um obstáculo epistemológico.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A tentativa, de romper com o tecnicismo, se revelou cheia de percalços. As hipóteses de que teriam dificuldades para detectar regularidades e formular um modelo para elas e que teriam dificuldades em recorrer a conhecimentos prévios e fazer investimento deles para resolver problemas ou até mesmo de associar o problema proposto a um determinado conteúdo matemático já conhecido, se confirmaram.

Houve, no entanto, um aparente envolvimento dos estudantes embora não se saiba dizer qual a motivação: saber para a prova ou vivenciar a experiência de investigação.

Para desfazer essa incerteza na última a aula do semestre foi: solicitado, que os alunos expressassem as sua impressões sobre as aulas de Modelagem Matemática e sobre o conteúdo. As respostas indicam que alguns se sentiram desafiados, mas encontraram dificuldades de interpretação dos problemas e montagem da expressão matemática, outros sentiram necessidade de mais tempo e mais problemas para um maior envolvimento pessoal. Todos os que responderam, expressaram atribuir importância ao estudo da modelagem.

REFERÊNCIAS

Bachelard, G. (1996). *A Formação do Espírito Científico. Contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Rio de Janeiro, Brasil: Contraponto Editora.

Bassanezi, R. C. (2004). *Ensino-aprendizagem com modelagem Matemática*. São Paulo: Editora Contexto.

Biembengut, M. S. y Hein, N. (2003). *Modelagem Matemática No Ensino*. 3.ed. São Paulo: Editora Contexto.

Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed Editora.

D´Ambrósio, U. (2008). *Uma história concisa da Matemática no Brasil*. Petrópolis, Brasil: Editora Vozes.

Donizeti, A. (2009). Modelagem Matemática: um outro olhar. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia. Vol. 2*(2), pp. 33-54.

Fernandes, F. (2006). Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino da Matemática. *UNIrevista. Vol.* 1(2).

Brousseau, Guy. (1976). Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. Willy Vanhamme et Jacqueline Vanhamme. La problematique et l'enseignement de la math_ematique. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisee par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amelioration de l'Enseignement des Mathematiques, Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organis_ee par la Commission Internationale pour l'Etude et l', Louvain-la-neuve, pp.101-117. <hal-00516569v1>. Disponível em: <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00516569v1> Acesso em: 07 jan 2018.

Gascón, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 4*(2), pp. 129-159.

Gascón, J. (2003). La necesidad de utilizar modelos em didáctica de las matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa. Vol. 5*(2), pp.11-37.

Sales, A. (2010). *Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de Licenciatura em Matemática.* (Tese de doutoramento em Educação). Campo Grande, MS: PPGEDU/UFMS.

Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática*. Brasília: Ministério da educação e do desporto/Secretaria de educação Fundamental.