

EL ESPACIO DE TRABAJO FÍSICO MATEMÁTICO COMO PROPUESTA TEÓRICA PARA ANALIZAR LOS PROCESOS SEMIÓTICOS, EXPERIMENTALES Y DISCURSIVOS QUE SE LLEVAN A CABO DURANTE LA MODELIZACIÓN DE UN MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO

THE PHYSICAL-MATHEMATICAL WORKING SPACE AS A THEORETICAL PROPOSAL TO
ANALYSE THE SEMIOTIC, EXPERIMENTAL AND DISCURSIVE PROCESSES THAT ARE
CARRIED OUT DURING THE MODELLING OF A DAMPENED HARMONIC MOTION

L'ESPACE DE TRAVAIL PHYSIQUE-MATHÉMATIQUE EN TANT QUE PROPOSITION THÉORIQUE
D'ANALYSE DES PROCESSUS SÉMIOTIQUES, EXPÉRIMENTAUX ET DISCURSIFS QUI SONT EFFEC-
TUÉS PENDANT LA MODÉLISATION D'UN MOUVEMENT HARMONIQUE AMORTI

Alfredo Martínez Uribe¹
François Pluvinage²
Luis Manuel Montaña Zetina³

^{1,2,3} Centro de Investigación y de
Estudios Avanzados del IPN

¹ Correo: alfymago@hotmail.com

¹ ORCID <https://orcid.org/0000-0001-8583-9451>

² Correo: fpluvinage@cinvestav.mx

² ORCID <https://orcid.org/0000-0002-5117-5850>

³ Correo: lmontano@fis.cinvestav.mx

³ ORCID <https://orcid.org/0000-0003-4123-7322>

RESUMEN

El proceso de modelización matemática es fundamental para el estudio de las ciencias como la física. Del mismo modo, es relevante para la enseñanza y el aprendizaje tanto de la física como de las matemáticas, pues establece la interacción entre ambas disciplinas. Aquí proponemos el Espacio de Trabajo Físico Matemático (ETFM) como un aporte al constructo teórico de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). Afirmamos que su estructura permite explicar los procesos que surgen cuando se llevan a cabo este tipo de tareas. Consideramos que la labor de modelización del movimiento de un oscilador armónico amortiguado permite a los estudiantes reflexionar sobre sus representaciones y promueve el desarrollo de procesos semióticos, experimentales y discursivos. Presentamos los resultados de una implementación didáctica cuyo enfoque pedagógico de investigación requiere construir representaciones y afirmaciones, interpretarlas y desarrollar habilidades. Se utilizó la metodología ACODESA para organizar a los estudiantes en equipos de trabajo y motivar el debate científico y la

autorreflexión. Damos cuenta de las génesis semiótica, experimental y discursiva dentro del ETFM y discutimos la relación entre ETFM y ETM^F.

Se trata de un estudio cualitativo sobre la forma en que un estudiante transita de la comprensión de un fenómeno físico a su descripción

matemática. Participó un grupo de 14 estudiantes pertenecientes a un curso de cálculo integral de segundo semestre de ingeniería de la Unidad Profesional

Interdisciplinaria en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas del IPN (UPIITA), Ciudad de México.

Palabras clave: modelización, enseñanza, aprendizaje, análisis de vídeo digital, representaciones.

ABSTRACT

The process of mathematical modeling is fundamental to the study of sciences, such as physics. In the same way, it is relevant for the teaching and learning of both physics and mathematics, because it establishes their interplay. Here we propose the Mathematical Physical Working Space (MPWS) as a contribution to the theoretical construct of Mathematical Working Spaces (MWS). We affirm that its structure allows to explain the processes that arise when this type of tasks is carried out. We believe that the task of modeling the motion of a damped harmonic oscillator allows students to reflect on its representations and promotes the development of semiotic, experimental, and discursive processes. We present the results of a didactic implementation based on the construction of a representation. It is a directed pedagogical approach that requires constructing representations and affirmations, interpreting them, and developing skills. The ACODESA methodology was used to organize the students into work teams, motivating scientific debate and self-reflection. We account for how semiotic, experimental, and discursive genesis were activated within the MPWS. The relationship between MPWS and MWSP is discussed. It is a qualitative study of the way in which a student moves from the understanding of a physical phenomenon to its mathematical description. A group of 14 students

Se presentan los progresos en la investigación llevada a cabo para ayudar a los estudiantes a comprender los aspectos matemáticos de los fenómenos físicos. Establecer la correspondencia entre los ámbitos de la física y las matemáticas es esencial para el desarrollo de la competencia en ingeniería.

belonging to a calculus course of the second semester of engineering of the Interdisciplinary Professional Unit in Engineering and Advanced Technologies of the IPN (UPIITA), Mexico City participated.

Keywords: modelling, teaching, learning, digital video analysis, representations.

RÉSUMÉ

Le processus de modélisation mathématique est essentiel à l'étude des sciences telles que la physique. Il est également pertinent pour l'enseignement et l'apprentissage de la physique et des mathématiques, en établissant leur interaction. Nous proposons ici l'Espace de Travail Physique Mathématique (ETFM) comme contribution à la construction théorique des Espaces de Travail Mathématique (ETM). Nous affirmons que sa structure permet d'expliquer les processus qui se présentent lorsque ce type de tâche est effectué. Nous considérons que la tâche de modélisation du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti permet aux étudiants de réfléchir sur leurs représentations et favorise le développement de processus sémiotiques, expérimentaux et discursifs. Nous présentons les résultats d'une mise en œuvre didactique basée sur la construction d'une représentation, une approche pédagogique de la recherche ciblée qui nécessite de construire des représentations et des affirmations, de les interpréter et de développer des compétences. La méthodologie ACODESA a été utilisée pour organiser les étudiants en équipes de travail, ce qui a suscité un débat scientifique et une autoréflexion. Nous rendons compte comment la

genèse sémiotique, expérimentale et discursive au sein de l'ETFM a été activée. La relation entre ETFM et ETM^F est discutée. Il s'agit d'une étude qualitative portant sur la façon dont un étudiant passe de la compréhension d'un phénomène physique à sa description mathématique. Un groupe de 14 étudiants appartenant à un cours complet de calcul du second semestre d'ingénierie de l'Unité Professionnelle Interdisciplinaire en Ingénierie et Technologies Avancées de l'IPN (UPIITA), Mexico, a participé.

Mots-clés : modélisation, enseignement, apprentissage, analyse vidéo numérique, représentations.

INTRODUCCIÓN

La descripción del movimiento y sus causas requiere la consideración de las leyes de Newton, incluidas en el corazón de los cursos de física introductoria en diferentes niveles académicos. En esta investigación, nos centramos en discutir algunos aspectos del movimiento y sus causas. Por ejemplo, Galili y Tseitlin (2003) subrayan que la importancia de la primera ley radica en el hecho de que es la única enunciada en forma textual: "Un objeto permanecerá en su estado de reposo o movimiento rectilíneo uniforme en tanto no sea alterado por la acción de una fuerza externa". Aquí quedan implícitas las condiciones necesarias para que la velocidad sea constante o la aceleración sea considerada una componente esencial de la fuerza, y la masa se puede interpretar como la resistencia que opone un cuerpo al movimiento. Todo esto, aunado a las distintas traducciones e interpretaciones hechas a través del tiempo, contribuye a la dificultad de esclarecer su significado.

Por tanto, para describir y explicar el comportamiento de un fenómeno físico en el lenguaje de la ciencia, es necesario aplicar y comprender las leyes de la física y los signos matemáticos asociados. ¿Qué procesos de trabajo fisicomatemático se desencadenan cuando alguien se enfrenta a una modelización matemática? Nuestro propósito es presentar un desafío que promueva el trabajo fisicomatemático asociado con el fenómeno de estudio, y reconocer los procesos cognitivos, semióticos y discursivos, así como las capacidades procedimentales y actitudinales que se activan cuando se realiza una tarea de modelización. Por otra parte, aspiramos a identificar elementos del discurso científico escolar que evidencian la aplicación de signos y símbolos en la construcción de representaciones y significados.

MARCO TEÓRICO

Consideramos que aplicar adecuadamente las leyes de Newton para estudiar las causas del movimiento de un cuerpo representa un problema de semiótica cuando se establece un proceso de comunicación. En la enseñanza de la física, parece necesario realizar las traducciones no sólo de un lenguaje verbal a uno matemático, sino de un lenguaje verbal cotidiano al científico y, finalmente, al matemático. Otros autores también rescatan el estudio de los signos, la mediación semiótica, la semiótica social, las teorías de representación, las relaciones entre los sistemas de signos y las teorías sobre la corporeización (*embodiment*) como modos de significación relevantes en la investigación educativa (Presmeg et al., 2018).

Recientemente ha surgido mayor interés por promover que la enseñanza de las ciencias tome como base las formas en que se construye el conocimiento científico (Prain y Tytler, 2012; Redish y Kuo, 2015; Duit y Treagust, 2012). Asimismo, se ha proporcionado información sobre cómo el trabajo de representación es fundamental para llevar a cabo procesos de descubrimiento, así como en la generación y comunicación del conocimiento (Elkins, 2011; Machado y Braga; Hitt y Quiroz Rivera, 2017; Malafosse, Lerouge y Dusseau, 2000; Halloun, 2007). Entonces, el conocimiento científico se construye a través de procesos complejos de razonamiento aplicados a la generación y verificación de hipótesis.

El descubrimiento científico implica procesos imaginativos y socializados que permiten la creación de modelos y representaciones que servirán como herramientas para mediar nuestra comprensión del mundo (Kelly, Druker y Chen, 1998). De este modo, las inscripciones como gráficos, diagramas, modelos 3D, imágenes digitales y simulaciones creadas por computadora sirven en sí mismos como mediadores que transforman los datos recogidos de una situación determinada en nuevas herramientas conceptuales de interpretación (Hubber, Tyler y Chittleborough, 2018).

El análisis de estos procesos de relación entre el significado y el significante no es sencillo, menos aun cuando otro campo de conocimiento está interrelacionado. Consideramos que el enfoque de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM) es útil para centrar la atención en las génesis semiótica, instrumental y discursiva, porque permite analizar cómo se produce significado matemático. Houde-ment y Kuzniak (2006) propusie-

ron inicialmente esta teoría para describir los procesos cognitivos que se llevan a cabo cuando se enseña y aprende la geometría. Los elementos que entran en juego en el *plano epistemológico* son el *representamen*, los *artefactos* y el *referencial*. En el *plano cognitivo* se encuentran la *visualización*, la *construcción* y la *prueba*.

Lagrange y colaboradores (2017) señalan que la activación de estas génesis depende del campo de estudio, la profundidad del análisis y los enfoques de otras teorías. Debido a la flexibilidad y plasticidad del modelo (Artigue, 2016), algunos investigadores como Moutet (2019) han impulsado la idea de extender el ETM a otros dominios del conocimiento; proponen vínculos matemáticos con la física en el contexto de las simulaciones de la relatividad especial, enfocándose en la resolución de problemas. Introducen dos planos epistemológicos (uno para la matemática y otro para la física) y un solo plano cognitivo. También han planteado vínculos con la química (Moutet, 2021).

Nuestra propuesta se enfoca en el trabajo fisicomatemático que surge al realizar la modelización matemática experimental como aspecto cotidiano en las ciencias para la búsqueda y análisis de modelos que describan y predigan el comportamiento de un fenómeno. En el *plano epistemológico*, se propone un *referencial* que integra el marco de racionalidad de la física y la matemática (Malafosse, Lerouge y Dusseau, 2000). Por otra parte, la *génesis experimental* implica una apropiación acelerada de *instrumentos* (programas informáticos, medición, videos, simulaciones, animaciones, aparatos) para el registro de datos y la interpretación inductiva o deductiva de

un fenómeno físico. Se introduce en el *plano cognitivo* la *simulación* como una componente que proviene de la física (ETM^F) y permite la conexión con el ETM sin la necesidad de agregar otros planos.

En la perspectiva de trabajo de la física, la *génesis experimental* se activa cuando un practicante realiza observaciones con la ayuda de *instrumentos* que permiten la recolección de datos sobre un fenómeno físico. En este modelo, *instrumento* es una construcción psicológica que combina el artefacto (objeto material) y los esquemas de comportamiento que el usuario desarrolla para utilizarlo en tareas específicas (Drijvers et al., 2010). Los datos permitirán esbozar un modelo matemático (o este podrá ser deducido a través de procesos de simulación digital). Los procesos descritos implican la consideración de componentes específicas que no se encuentran definidas inicialmente en el ETM, por lo que este ha de modificarse para tener en cuenta las especificidades de la matemática y la física dentro de un espacio de trabajo propio: el Espacio de Trabajo Físico Matemático (ETFM).

La modelización matemática surge como un proceso operativo dentro del ETFM que coincide con el ciclo de modelización propuesto por Touma (2009): la experimentación se reconoce como un primer paso, luego un objeto matemático resulta de la interpretación inductiva de los datos experimentales a través de un ajuste de curva. El objeto identificado se traducirá en un modelo algebraico. A su vez, los tratamientos de este modelo permitirán una reinterpretación deductiva del fenómeno físico. Este ciclo se ubica en la perspectiva cognitiva identificada por Kaiser y Sriraman (2006).

Se ha identificado que los procesos de interpretación inductiva y deductiva permiten establecer relaciones entre las distintas componentes del ETM^F. Tales procesos surgen, sobre todo, en la circulación que se da sobre la pared de descubrimiento, pero dependerá de la dirección en que se lleve a cabo el proceso. No es lo mismo ir de la visualización a la experimentación (proceso inductivo), que de la experimentación a la visualización (deductivo).

Al tiempo que el practicante transita por las distintas componentes del ETM^F propuesto, construye un modelo matemático del fenómeno de estudio que le permite describirlo a partir de sus distintas representaciones. En tanto que el alumno reconoce las propiedades matemáticas del modelo asociadas a dicho fenómeno, estará en posibilidad de abstraerlo (proceso de *simulación mental*¹), para luego adentrarse en el análisis del modelo como objeto matemático, dentro del ETM^F. El modelo matemático propuesto se analizará con distintos artefactos, que se convertirán en *instrumentos*, activando la *génesis instrumental* del ETM^F. El espacio de trabajo no está aislado, puesto que debe realizarse un trabajo fisicomatemático previo para entrar en él (Figura 1).

¹ Este término se puede asociar con la concepción de Clement (2009) denominada *schema-driven imagistic simulation* (simulación imaginaria guiada por esquemas). El sujeto atraviesa un proceso en el que un esquema de acción general (intuición física) asimila la imagen de un objeto particular y produce expectativas sobre su comportamiento en una imagen dinámica posterior, de modo que se puede considerar que el conocimiento ha sido corporizado.

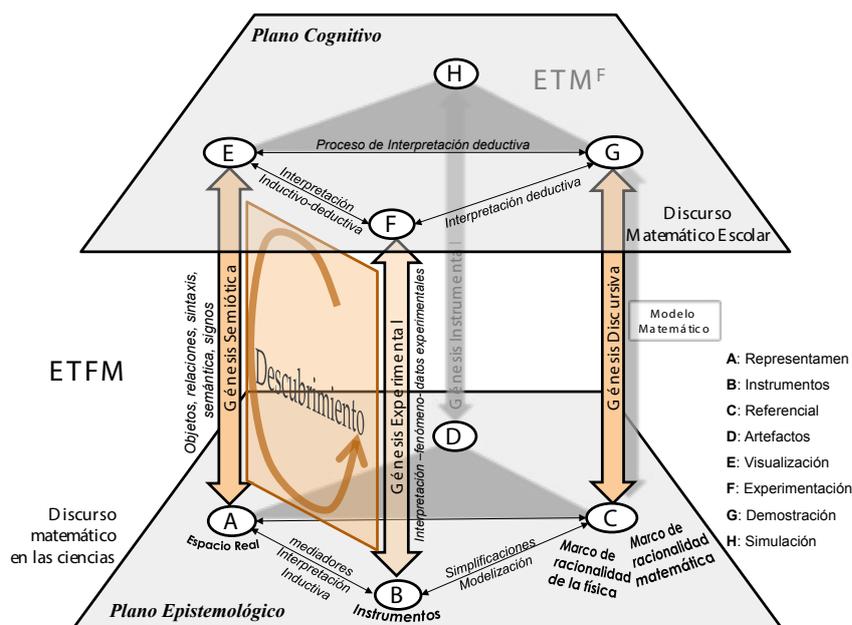


Figura 1. Espacio de Trabajo Físico Matemático (ETFM) y ETM proveniente de la Física (ETM^F).

El proceso de modelización puede interpretarse como un ETM^F en el sentido de Kuzniak y Richard (2014): ese paradigma guía y estructura la organización de sus componentes, que han sido instituidos por una comunidad de físicos que han acordado la formulación de problemas y organizado sus soluciones mediante instrumentos de ajuste de curva con la intención de construir un modelo matemático. Esta praxis muestra una forma de pensar acorde al *referencial* propuesto en el ETM^F.

El diseño de tareas apropiadas para la enseñanza requiere del profesor un ETM^F personal cuyo *referencial* sea amplio, en el que se establezcan relaciones apropiadas entre sus componentes para activar sus génesis y revelar los dominios de conocimiento del profesor de física (Asikainen y Hirvonen, 2010). La resolución adecuada de la tarea propuesta dependerá de cuán libres de obstáculos se puedan establecer las relaciones entre las distintas componentes y génesis del ETM^F personal del estudiante. Las diferencias entre las nociones

del ETM^F personal del profesor y las del estudiante revelan la movilidad del plano cognitivo.

METODOLOGÍA

El estudio que aquí se presenta es de tipo cualitativo sobre el diseño de una tarea centrada en la actividad implementada para trabajar durante tres sesiones con un grupo de 14 estudiantes de ingeniería de segundo semestre que cursaban la asignatura de Cálculo diferencial e integral. Se han utilizado nombres falsos para identificarlos. El diseño de la actividad didáctica fue validado previamente con un grupo piloto de 8 estudiantes de bachillerato tecnológico y 6 estudiantes de olimpiada de física. Previo a la actividad, se aplicó una pequeña prueba diagnóstica cuyos resultados se exponen más adelante.

En este experimento se aplicó el enfoque sociocultural ACODESA (aprendizaje colaborativo, debate científico y autorreflexión). Con este método, se espera que

un concepto construido por un alumno a partir de sus representaciones espontáneas evolucione hasta convertirse en una representación institucional (como las utilizadas por los profesores o los libros de texto) a través del trabajo individual, en equipo, el debate en el aula, la autorreflexión y la institucionalización (González Martín, Hitt y Morasse, 2008). En un primer momento, el profesor actúa como guía y los alumnos tienen el deber de argumentar y validar sus producciones; posteriormente, en el proceso de institucionalización, el profesor destaca las diferentes representaciones propuestas y las confronta con las institucionales (Hitt y Cortés, 2009).

Se utilizaron las hojas de trabajo de los estudiantes y las videograbaciones de las sesiones como instrumentos para la recolección de datos. Se realizó un análisis previo del diseño y un análisis posterior de la actividad al finalizar la experimentación.

DIAGNÓSTICO

Se asume que los participantes de este estudio acreditaron un curso de física en la secundaria (a los 13 años de edad) en el que se introdujeron los conceptos de velocidad, aceleración, fuerza y energía, entre otros. En preparatoria, dependiendo del subsistema público o privado de educación, debieron haber acreditado de dos a cuatro cursos de física, donde se vuelven a tratar estos conceptos con mayor profundidad; sin embargo, se decidió aplicar una prueba diagnóstica que constó de dos secciones, una correspondiente a física y otra a matemáticas.

La sección de física planteó 4 preguntas con la intención de recu-

perar las ideas previas asociadas a las leyes de Newton y la fuerza de arrastre, por considerarse conceptos relacionados con el problema que los estudiantes tendrían que describir. En la sección de matemáticas se plantearon dos preguntas con la intención de reconocer si los estudiantes podrían relacionar la gráfica de una función sinusoidal con sus respectivos parámetros y significados, así como las ecuaciones de otras funciones de uso común con sus respectivas representaciones gráficas.

El diagnóstico evidenció que 14 estudiantes reconocieron parcialmente el efecto de la inercia en el movimiento y 13 la presencia de la fuerza de fricción. Todos lograron identificar que la magnitud de una fuerza se puede calcular como el producto de la magnitud de la aceleración por la masa de un objeto. Por otra parte, 6 alumnos hicieron referencia a la fricción como fuerza de reacción. Sobre la fuerza de arrastre, 8 consideraron algún tipo de resistencia del medio durante el movimiento de los cuerpos.

En cuanto a matemáticas, 8 estudiantes identificaron correctamente una gráfica sinusoidal con sus representaciones gráficas y su significado. Por otra parte, entre un grupo de gráficas de ecuaciones como la del seno, cuadrática, racional cuadrática, recta, exponencial, cúbica, cuarta y logaritmo natural, la ecuación que resultó más difícil de relacionar con su gráfica fue la del logaritmo natural, seguida en orden de menor dificultad por la exponencial de base e, la racional cuadrática, luego la de cuarto grado y finalmente la cúbica. Las ecuaciones de la línea recta con ordenada al origen, la sinusoidal y la cuadrática fueron identificadas correctamente por

todos los estudiantes, tal vez debido a que son ecuaciones de uso más común en el contexto escolar.

ANÁLISIS A PRIORI DE LA ACTIVIDAD DE MODELIZACIÓN CON UN OSCILADOR ARMÓNICO AMORTIGUADO

Para adentrarse en los procesos cognitivos presentes al llevar a cabo una tarea de modelización, los estudiantes debían explorar un aparato experimental con movimiento armónico amortiguado con una aplicación móvil de captura de video llamada VidAnalysis. Con los datos obtenidos, los estudiantes debían producir una primera curva de ajuste a mano alzada y luego una más fina, con la ayuda de un *applet* hecho en GeoGebra que permite modificar algunos parámetros de la curva.

El diseño de la actividad propuesta se basó en la construcción de una representación a través de cinco secciones de trabajo que tomaron en cuenta la observación de un fenómeno físico, interpretación individual y entre pares, recopilación de datos del fenómeno de estudio por medio del celular, modelización con ajuste de curva para reinterpretar los datos con un *applet* de GeoGebra e interpretación final.

SECCIÓN 1. OBSERVACIÓN DE ARTEFACTOS

Las observaciones generales sin acceso a los datos requieren que el estudiante realice una exploración del funcionamiento del aparato y configure el *representamen* en el *plano epistemológico* del E_{TFM}; después, debe describir con sus propias palabras (*génesis semiótica*) el movimiento, incluyendo sus observaciones sobre los cambios

en el desplazamiento, la velocidad y la acción de las fuerzas involucradas. Se espera que el pupilo ofrezca una descripción puramente cualitativa del movimiento, declarándolo como oscilatorio con decaimiento, con desplazamiento, velocidad y aceleración variables, e identificando que cuando la caja se detiene, la velocidad es cero y la aceleración es máxima; que la inercia anula la aceleración y maximiza la velocidad cuando el cuerpo pasa por el punto de equilibrio, y que la fuerza restititiva resulta de la acción del muelle unido al cuerpo en movimiento; el amortiguamiento, de la acción del medio o fuerza de arrastre sobre el cuerpo y que la fricción es causada por el contacto de los rodamientos con los ejes engrasados por los que se desliza el cuerpo. Se establece un vínculo entre el *representamen* y el *referencial*.

SECCIÓN 2. VISIÓN GENERAL BASADA EN LA NUBE DE PUNTOS

Las observaciones generales de los datos están destinadas a recuperar mediciones del desplazamiento. Se espera que el estudiante videograbee el movimiento del oscilador armónico amortiguado con la aplicación VidAnalysis y recupere los pares ordenados correspondientes a la posición de la caja con respecto al tiempo. La aplicación ofrece la visualización de la gráfica de dispersión y una tabla de valores. A continuación, debe trazar la gráfica en hojas de trabajo con los datos proporcionados por la aplicación. Se pide al estudiante que agregue sus observaciones sobre los cambios en el desplazamiento, la velocidad y la acción de las fuerzas involucradas, pero además se le pregunta qué información puede adicionar o cambiar respecto a su descripción anterior. Se espera que incorpore información a su

primera descripción tomando en cuenta la tendencia de los puntos correspondientes al desplazamiento, la pendiente de la gráfica y los puntos de inflexión. En esta sección se asume que la utilización de los *instrumentos* promueve la activación de la *génesis experimental* en el ETFM, relacionando la componente de *experimentación* con la de *visualización* al esbozar una primera aproximación al modelo matemático que describirá el fenómeno de estudio.

SECCIÓN 3. CONSIDERACIONES HIPO-TÉTICAS

En las consideraciones hipotéticas se pretende que el estudiante reconozca que el comportamiento de la situación observada podría ajustarse al modelo de una curva suave y continua utilizando algún proceso de interpolación o extrapolación entre los datos. Entonces, a manera de una primera aproximación, se le solicita que dibuje a mano alzada una curva continua guiada por la tendencia de los puntos. Esta sección evidencia un vínculo de la componente de *visualización* del ETFM con el *referencial* asociando el comportamiento del fenómeno a un objeto matemático.

SECCIÓN 4. CURVA DE AJUSTE. TRABAJO DE INSTITUCIONALIZACIÓN

En esta sección se propone hacer un ajuste de curva más fino a través de un *applet* diseñado con GeoGebra. El educando debe exportar los datos obtenidos por VidAnalysis a una hoja de cálculo de GeoGebra, donde se puede proponer una función que se aproxime al comportamiento del sistema. En un primer momento se sugieren algunos modelos de ajuste comúnmente utilizados

en el campo experimental, tales como: $y = mx + b$; $y = x^a$; $y = ae^{bx}$; $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Posteriormente, se le requiere que, según considere, proponga un modelo matemático del comportamiento del sistema. Se espera una curva sinusoidal en función del tiempo más su desfase, modulada por un factor de decaimiento exponencial, y que se descarten otros tipos de curvas, como las del seno y coseno natural o algún polinomio. Se busca la activación de la *génesis experimental* del ETFM, apoyada en los *instrumentos* como mediadores de la interpretación inductiva para la formación de un modelo matemático del comportamiento del fenómeno físico. También se establece una relación entre el *referencial* y el *representamen* al buscar un modelo de ajuste apropiado. Otros aspectos que contribuyen a la interpretación inductiva son la activación de la *génesis semiótica* y la *experimentación*, ambas relacionadas con la visualización.

Una vez que el estudiante ha propuesto un ajuste a la función, se podrá auxiliar del *applet* de GeoGebra para manipular los parámetros de la función de amortiguamiento. A continuación, se inspecciona la función con un comando propio del *software* y se le solicita al alumno que la escriba en las hojas de trabajo, especificando el significado de cada parámetro utilizado. Se espera que la función encontrada, así como sus parámetros, sean reconocidos como $f(t) = Ae^{-qt} \cos(\omega t + \varphi)$, donde A representa la amplitud de la oscilación, e corresponde al decaimiento de los puntos máximos y mínimos de la función coseno de un ángulo definido por ωt más un desfase con respecto al origen. El exponente de e es negativo, según la forma del decaimiento, y q

corresponde a la relación entre la masa que se desplaza y la constante de restitución del resorte. Se requiere que el pupilo sea capaz de establecer un vínculo con el *referencial* del ETFM donde los *marcos de racionalidad de la matemática y de la física* deben articularse para interpretar el modelo como objeto matemático que describe apropiadamente los momentos en que las fuerzas de restitución y arrastre actúan sobre la masa, oponiéndose al movimiento del oscilador armónico y amortiguándolo en el tiempo. Si la comunidad acepta el modelo obtenido, este puede ser interiorizado, relacionando las componentes de *prueba y visualización* con la de *simulación*. El trabajo matemático subsecuente se llevará a cabo a partir de este momento sólo del lado del ETM^F, donde el marco de racionalidad es sólo matemático y las génesis que se han de activar son la *semiótica, instrumental y discursiva*.

Para evaluar la calidad del modelo propuesto, se introdujo el concepto de proximidad entre dos funciones en un intervalo. Calculando la distancia entre dos funciones mediante una norma: Si tenemos una norma definida para funciones $\|f(x)\|$, se define la distancia entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ como $d(f(x), g(x)) = \|f(x) - g(x)\|$

Sabiendo que:

$\|f(x) - g(x)\|_2 = \sum_{i=1}^n (f(x) - g(x))^2$
sobre un conjunto discreto de puntos, entonces la norma L_2 se define como:

$$\|f(x) - g(x)\|_2 = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx$$

conocida como norma de mínimos cuadrados o convergencia media cuadrática.

Esta operación utiliza el comando *Ajustar* de GeoGebra para definir una función de error cuadrado mínimo a los puntos de una lista. El estudiante calcula la convergencia media cuadrática con la intención de comparar la función de ajuste que propuso con la generada por GeoGebra, escribiendo el comando: *Ajusta* (<Lista de puntos>, <Función>), que calcula una función utilizando el método de mínimos cuadrados para ajustarse a los puntos indicados; luego escribe el comando: *Integral* (<Función>, <Extremo inferior del intervalo>, <Extremo superior del intervalo>), pero en vez de función se escribe $(f - g)^2$. Los extremos pueden elegirse arbitrariamente. Se les pregunta: ¿Cuál es el valor de la convergencia a la que aspiramos? y se espera que cada uno sea capaz de inferir que la distancia entre las funciones es un error de aproximación que se busca minimizar.

El *representamen* dentro del ETM^F es la función sinusoidal amortiguada con la que se ha de trabajar. Al calcular la convergencia media cuadrática, GeoGebra es el artefacto que ha de convertirse en instrumento, activando la *génesis instrumental*; por otra parte, los tratamientos correspondientes activan la *génesis semiótica*. La convergencia media cuadrática es un tema que puede ser aprovechado para ampliar el *referencial* del ETM^F de los estudiantes.

SECCIÓN 5. INTERPRETACIÓN FINAL

Aquí el alumnado debe describir una vez más el movimiento con sus propias palabras, incluyendo sus observaciones sobre los cambios de desplazamiento, la velocidad y la acción de las fuerzas involucradas y auxiliándose del modelo encontrado. Se espera

que las relaciones establecidas entre las componentes del ETFM personal de los estudiantes les permitan hacer una interpretación deductiva del fenómeno. La descripción del *representamen* con ayuda de las distintas representaciones encontradas habrán de vincularse con el *referencial* y sus marcos, activando la *génesis discursiva* que permitirá a todos aproximarse a la demostración.

ANÁLISIS A POSTERIORI BASADO EN LA METODOLOGÍA ACODESA Y LA PROPUESTA DEL ETFM

Dado que el objetivo es analizar los procesos cognitivos con el modelo ETFM, y que la metodología ACODESA involucra el trabajo individual y en equipo, el debate en el aula y la autorreflexión, el análisis de la experimentación se basa en ambos marcos (Hitt y González Martín, 2015). Las fases son: trabajo individual, trabajo en equipo sobre la misma situación, debate, retorno a la situación e institucionalización. Para llevar a cabo las actividades, se organizó el grupo libremente en equipos de trabajo; sin embargo, cada alumno respondió individualmente.

SECCIÓN 1. OBSERVACIÓN DE ARTEFACTOS

Los equipos comenzaron por la exploración del aparato para elaborar una descripción verbal de lo observado (el *representamen* en el ETFM), considerando los cambios en el desplazamiento, la velocidad y la acción de las fuerzas involucradas, e hicieron sus observaciones por turnos. Para su primera descripción, entraron en un debate científico a partir de sus propios *referenciales*; según el ETFM, la *génesis semiótica* se activa cuando

interpretan la representación del movimiento, y la *discursiva* cuando lo explican. A raíz del intercambio de ideas, los estudiantes desarrollaron sus respuestas individuales: diez alumnos se refieren al decaimiento de la amplitud expresando que la caja se va deteniendo progresivamente, que la distancia disminuye en cada oscilación y que el tiempo del movimiento oscilatorio va en aumento. Estas afirmaciones revelan cómo los estudiantes comienzan a construir sus propias justificaciones.

Respecto a la velocidad, seis estudiantes se refieren al desplazamiento del cuerpo enunciando que la distancia con respecto a la posición inicial cambia; el origen del sistema de referencia permanece indefinido. Por otro lado, aunque no mencionan explícitamente la palabra *aceleración*, cuatro estudiantes afirman que la velocidad varía de modo que, cuanto mayor sea el desplazamiento, mayor será la velocidad. Otro estudiante se refiere a algo que denominó "velocidad de reacción", todo ello sin determinar las causas del movimiento.

En lo que concierne a la fuerza, cuatro estudiantes identifican la presencia de la fuerza de restitución brindada por el resorte, la de la mano que inicia el movimiento y la de fricción. Mencionan explícitamente que la fuerza se añade cuando se estira el resorte, y que la fuerza opuesta detiene progresivamente el movimiento. Entre otras expresiones, mencionan algo como "acción del resorte", "tensión" y "resistencia del resorte", pero no identifican los principios a los que estas fuerzas obedecen, revelando que el *referencial* en el *plano epistemológico* del ETFM personal del estudiante requiere ser ampliado.

Los alumnos usan oraciones completas para el tipo de movimiento y sus características y parecen hacer referencia a la inercia como la propiedad de la masa que se

opone al movimiento. Sus descripciones también incluyen su ponderación y las transformaciones energéticas durante el desplazamiento (Figuras 2 a 4).

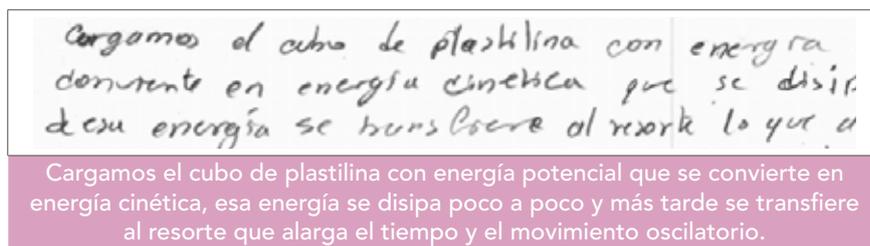


Figura 2. Primera descripción de David. Fuente: Elaboración propia.

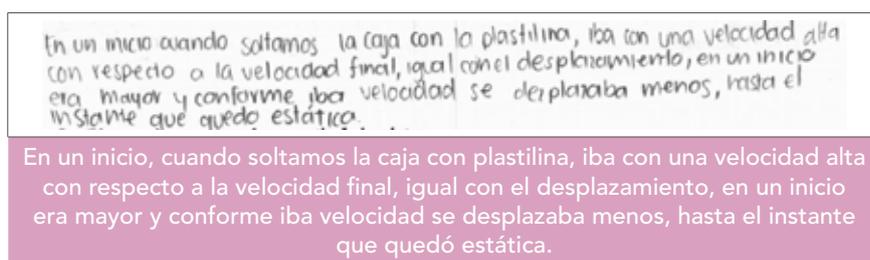


Figura 3. Primera descripción de Luisa. Fuente: Elaboración propia.

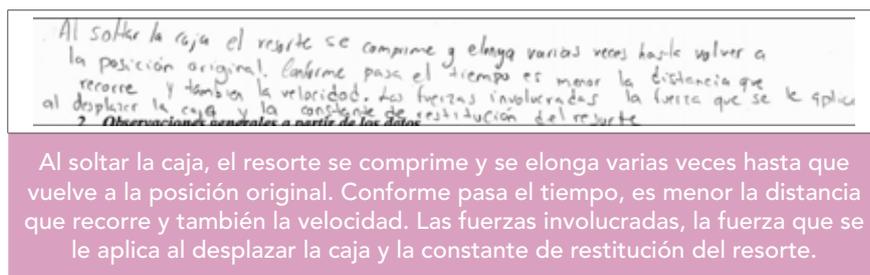


Figura 4. Primera descripción de Efrén. Fuente: Elaboración propia.

Esta primera actividad muestra cómo se construye el ETFM activando la *génesis semiótica* que proviene del *representamen* en el plano epistemológico. Al exigir la inclusión de ciertas consideraciones espaciotemporales, el aparato presentado permitió que el fenómeno fuera observable. La *visualización* en este caso se convierte en un verdadero *esquema* (Vergnaud, 1992): una organización invariante de comportamientos para alguna clase de situaciones que requiere no sólo de la curiosidad, sino también de atención al detalle en el diseño de un sistema espaciotemporal de referencia que considera condiciones iniciales y finales.

SECCIÓN 2. VISIÓN GENERAL BASADA EN LA NUBE DE PUNTOS

Esta sección activó la *génesis experimental* al recolectar los datos experimentales utilizando VidAnalysis, el celular y el oscilador como *instrumentos*, videograbando el suceso y realizando un seguimiento del desplazamiento del objeto de estudio cuadro por cuadro. La tabla de datos obtenida sería exportada a otra aplicación (otro *instrumento*) para un análisis más preciso. La apropiación de la aplicación informática como una herramienta se hizo sobre la marcha, ya que el *software* es sencillo de utilizar. Se requirió de un proceso acelerado de instrumentación para llevar a cabo la experimentación.

Aunque la aplicación permite recuperar información sobre el movimiento, se solicitó a los

estudiantes que transcribieran algunos puntos al plano cartesiano de su hoja de trabajo, con la

intención de centrar su atención en los datos y la tendencia de su comportamiento (Figura 5).



Figura 5. Coordenadas y nube de puntos. Equipo: "Indeterminados". Fuente: Elaboración propia.

Después, se les solicitó que redescubrieran el movimiento observado considerando los datos obtenidos. Se les requirió que hicieran estas continuas descripciones con la intención de ampliar el significado

del *representamen* a partir de la nueva información encontrada a raíz de las distintas representaciones. Esto permitió a los estudiantes someter a un riguroso entorno de prueba de sus hipó-

tesis, resignificar la aceleración a partir de su signo, e incorporar las palabras que resultaron más específicas para describir el fenómeno como la disminución del movimiento ondulatorio (Figura 6).

2.1. Con los datos obtenidos en la gráfica anterior describe el movimiento que has observado con tus propias palabras, incluyendo tus observaciones sobre los cambios de desplazamiento, velocidad y acción de las fuerzas involucradas. ¿Qué información puedes agregar o cambiar con respecto a tu descripción anterior?

Con base a los datos obtenidos gracias a la aplicación concluimos que la hipótesis sobre el experimento era correcta. Excepto en la velocidad ya que en los puntos máximos y mínimos la velocidad es cero, teniendo una aceleración positiva y una negativa al acercarse a estos.

2.1 Con la información de los datos del gráfico anterior, ¿qué cambió en su descripción anterior?

Basándonos en los datos obtenidos gracias a la aplicación, llegamos a la conclusión de que la hipótesis sobre el experimento era correcta. Excepto en la velocidad, ya que en los puntos máximo y mínimo la velocidad es cero con aceleración positiva y negativa al acercarse a estos puntos.

Figura 6. Respuesta de Eduardo. Fuente: Elaboración propia.

En esta actividad fue imprescindible la comunicación entre pares, tanto para reconocer el funcionamiento de la aplicación VidAnalysis en el dispositivo móvil, como para interpretar las representaciones obtenidas. La instrumentación de las herramientas (el dispositivo mecánico y la aplicación en el celular) activó la *génesis experimental*, y propició la interpretación del fenómeno a partir de los datos experimentales, dando lugar al proceso de modelización experimental.

Este proceso de *experimentación* promovió una *visualización* nueva, el modelo mental construido en la actividad anterior se enriqueció con la interpretación deductiva del fenómeno a partir de los datos obtenidos, de modo que el estudiante debió interpretar el *representamen* a través de otras representaciones. Además, la discusión de los participantes acerca del origen del sistema de referencia y el comportamiento del fenómeno de estudio enrique-

ció la componente de *visualización* en el plano cognitivo del EFM. Las interacciones descritas en las líneas anteriores evidencian las relaciones que se establecen entre el *representamen* y los *instrumentos*, los componentes del *plano epistemológico*; las acciones que estimulan la activación de las *génesis experimental* y *semiótica* que recaen en la *experimentación* y *visualización* respectivamente se relacionan a través del proceso de interpretación inductiva, comple-

tando un proceso de circulación en la pared de descubrimiento en el ETFM personal del estudiante.

SECCIÓN 3. CONSIDERACIONES HIPO-TÉTICAS

Consistió en dibujar una curva de la nube de puntos para sugerir a los estudiantes la posibilidad de realizar visualmente procesos

de interpolación y extrapolación, discriminar errores de observación y aproximarse a un modelo matemático. De once estudiantes que respondieron esta parte, ocho trazaron curvas a través de los puntos, como una primera aproximación al modelo matemático buscado (Figura 7). Cuando los estudiantes entran en el debate para discutir la naturaleza del mo-

delo obtenido y su relación con el fenómeno estudiado, se establecen relaciones con el *referencial* del ETFM personal del estudiante, activando la *génesis experimental* y la *génesis discursiva*, que a su vez se relacionan con el *representamen*. El *referencial* se amplía cuando los estudiantes proponen modelos de aproximación con los que defenderán sus argumentos.

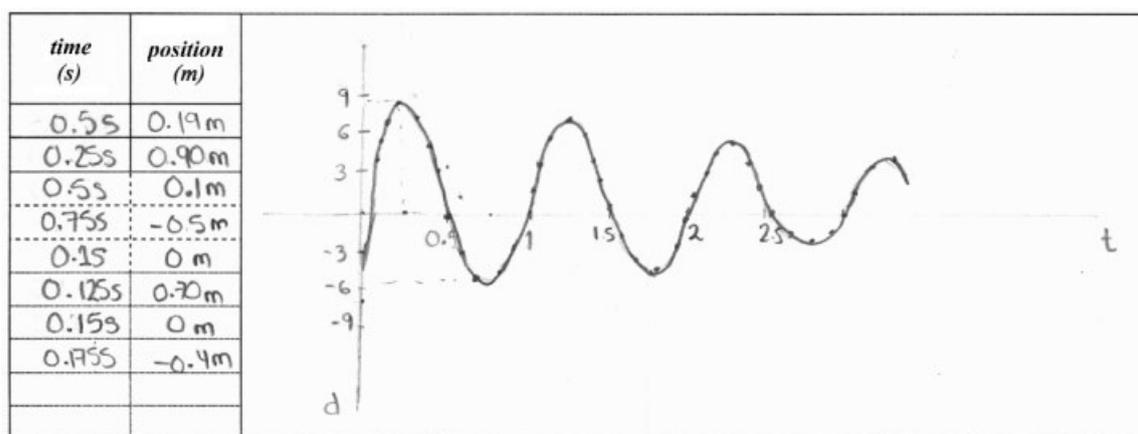


Figura 7. Ajuste de curva a mano alzada. Equipo: "Indeterminado". Fuente: Elaboración propia.

SECCIÓN 4. CURVA DE AJUSTE. TRABAJO DE INSTITUCIONALIZACIÓN

Para relacionar el comportamiento de un sistema con una curva que se le aproxima se propusieron algunos modelos que podrían ser útiles porque son comunes, aunque la posibilidad de proponer otro quedó abierta. La Tabla 1 muestra las propuestas de los estudiantes.

Para contrastar los modelos propuestos con el modelo científica-

mente aceptado, el profesor instó a que los estudiantes enviaran por correo los datos de su experimentación; más tarde en sesión plenaria, exportó a GeoGebra los datos obtenidos por un equipo, para que los alumnos realizaran un ajuste de curva. Antes de comenzar, solicitó el modelo propuesto por un equipo con la intención de guiar la observación de la nube de puntos y ayudar a identificar los parámetros relacionados (amplitud, frecuencia y decaimiento). Los estudiantes presentaron sus

propuestas y las compararon con la tendencia de los puntos. Los parámetros relacionados con la amplitud y la frecuencia fueron los más fáciles de identificar, probablemente porque había una propensión a elegir un modelo sinusoidal. En cambio, el decaimiento fue más difícil, tal vez, como se evidenció en los resultados del diagnóstico, debido a la dificultad para reconocer esta gráfica.

El profesor dedicó unos minutos de la clase para identificar la curva, suponiendo que la tendencia de la nube de puntos les daría a los estudiantes una pista de su forma. Juan trazó una línea recta inclinada de pendiente negativa siguiendo los máximos o crestas de la curva (Figura 8a). Efrén, a partir de su percepción, dibujó algo parecido a un cuarto de elipse (Figura 8b).

Tabla 1. Funciones propuestas por los estudiantes para el ajuste. Fuente: Elaboración propia.

Propuestas Estudiantes	Conteo
$y = \text{sen } x$	2
$y = a_0 + a_1x + a_2x^2$	2
$y = a \cos (t)$	1
$x = \cos (t)$	3

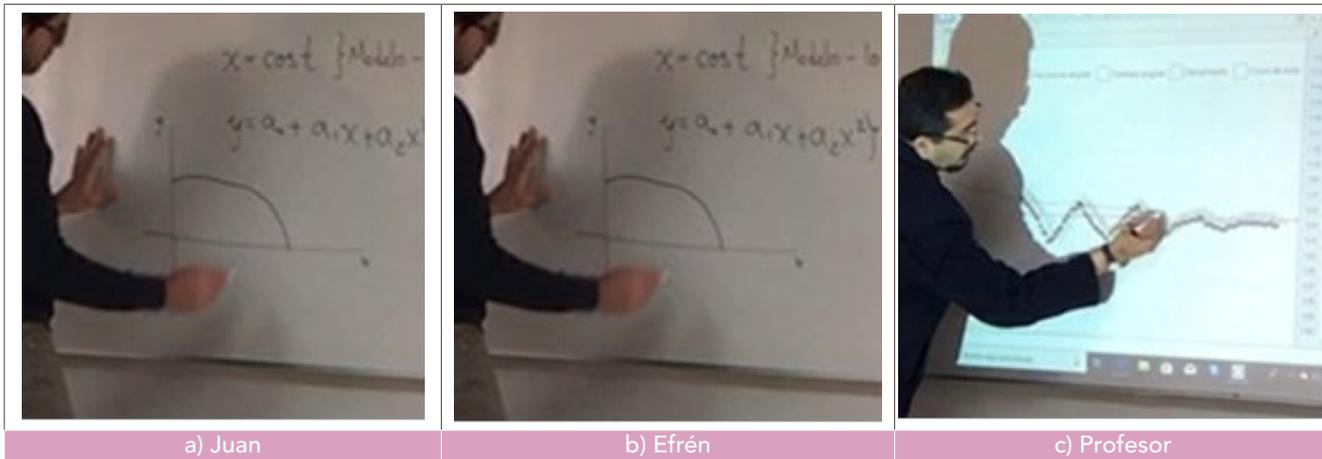


Figura 8. Ajuste de curva y nube de puntos. Plenaria. Fuente: Elaboración propia.

El profesor intervino posteriormente con la intención de resaltar los máximos de la curva proyectada en el pizarrón (Figura 8c), entonces algunos estudian-

tes sugirieron que se podría usar la función exponencial.

Luisa esbozó la gráfica; por su parte, el profesor solicitó la

aprobación de los demás estudiantes para confirmar que, en efecto, estuvieran de acuerdo con la forma propuesta (mostrada en la Figura 9).

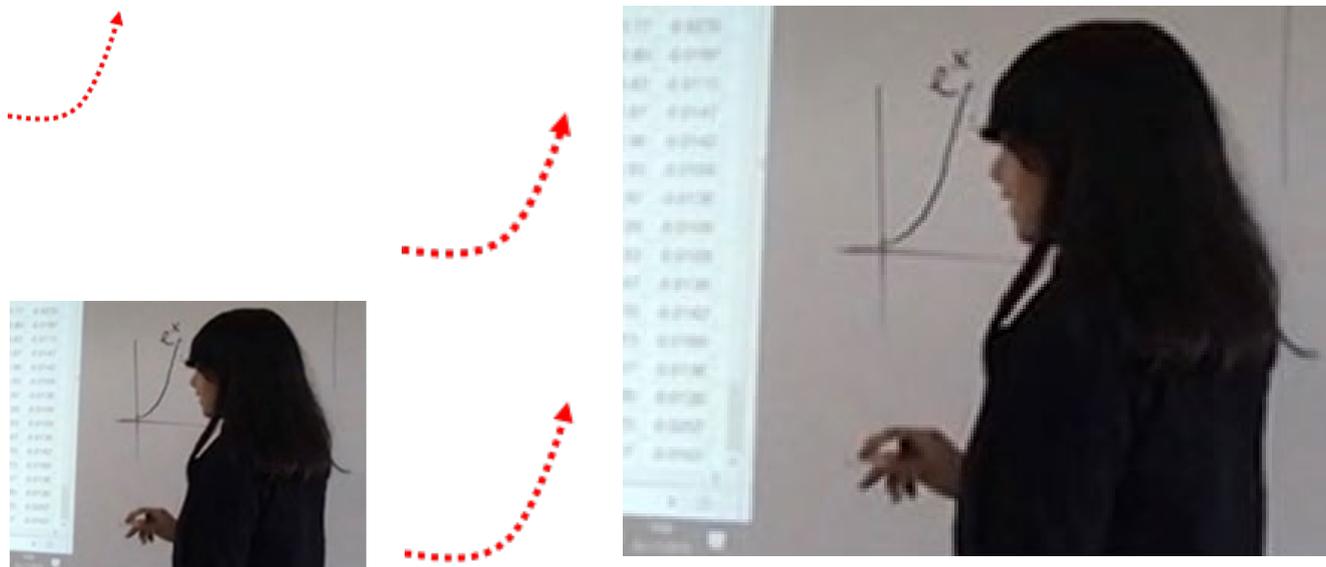


Figura 9. Gestos de e^x y su representación gráfica. Fuente: Elaboración propia.

El catedrático decidió seguir adelante y esperar a que Efrén hiciera el primer ajuste con los datos correspondientes a su equipo para poder observar la ecuación obtenida. La adaptación lograda se muestra en la Figura 10.

$$y = (0.08) e^{(-0.45x)} \cos(8.41x + 2.9)$$

Figura 10. Adaptación recuperada por Rodrigo en sus hojas de trabajo. Fuente: Elaboración propia.

En plenaria se llegó al acuerdo de que la forma del gráfico buscado para la descomposición debía ser e^{-x} , como se muestra en la curva de ajuste trazada con la ayuda del *applet* de GeoGebra (Figura 11). Se mencionó que la

función exponencial buscada debía proporcionar una tendencia de valores que disminuyeran en el eje de las ordenadas, a medida que se incrementaban en el eje de las abscisas. Los otros equipos elaboraron sus ajustes, y alcanza-

ron sus propias aproximaciones, las cuales, a su vez, fueron aceptadas por todos los estudiantes; sin embargo, se consideró desde el diseño de la actividad que estos enfoques debían validarse con respecto a una tendencia central.

El educador explicó que en todos los experimentos hay una validación del modelo matemático, una revisión de cuánto se alejan los datos de una tendencia central, y la ejemplificó con el método de paralelogramo para el cálculo de incertidumbres (Baird, 1991). Una vez alcanzado un modelo matemático ajustado a los datos, se hizo una comparación entre el modelo aproximado de los alumnos y el modelo general encontrado por GeoGebra.

La comparación se realizó utilizando la convergencia media cuadrática, también denominada

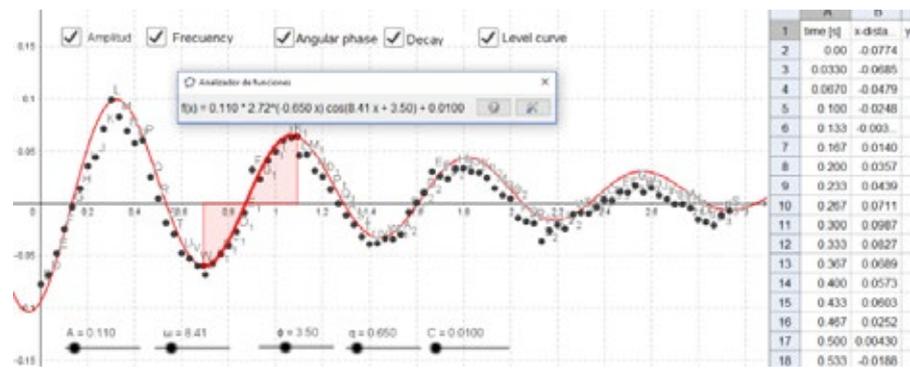


Figura 11. Aplicación de ajuste (Reconstrucción). Fuente: Elaboración propia.

aproximación entre funciones. Debido al contexto académico de los estudiantes, se consideró necesario proporcionar más información y aprovechar las herramientas que ofrece el sof-

ware. El valor calculado de la convergencia media cuadrática fue considerado, en consenso por los estudiantes y el profesor, como un error de ajuste aceptado sin intervalos de incertidumbre.

SECCIÓN 5. INTERPRETACIÓN FINAL

Consideramos que la observación del amortiguamiento de la oscilación permitió a cuatro estudiantes hacer descripciones en las que lograron relacionar conceptos de energía, a pesar de que dos de ellas fueron incompletas; otro

par se reservó sus respuestas (Figuras 12 a 14). Los estudiantes mencionan las fuerzas que intervienen, pero no logran relacionar cabalmente el movimiento del oscilador armónico con sus causas y los principios a los que obedecen,

evidenciando que el referencial en el plano epistemológico del EFM personal del estudiante requiere ser fortalecido, tal vez con mayor énfasis en el marco de racionalidad de la física que en el de racionalidad matemática.

Podemos observar que la fuerza decrece con el tiempo, los puntos máximos coinciden con los instantes en que el oscilador llega al final de su recorrido su velocidad y aceleración son 0 antes de alejarse y volver a tomar momento, los mínimos coinciden con la máxima extensión del resorte y gracias a la fricción, pico de su energía.

6. Conexión entre modelos

Podemos observar que la fuerza disminuye con el tiempo. Los puntos máximos coinciden con los momentos en los que el oscilador llega al final de su camino. Su velocidad y aceleración son cero antes de alejarse y moverse de nuevo. Las mínimas coinciden con la máxima extensión del manantial y gracias a la fricción, pico de su energía.

Figura 12. Interpretación de David. Equipo "Indeterminado". Fuente: Elaboración propia.

Al inicio, cuando se suelta el bloque de plastilina, ya analizando la gráficas que hicimos con ayuda de geogebra, encontramos que tanto la velocidad máx y aceleración máx, se encuentra dentro de los primeros segundos y conforme va avanzando el tiempo va a reducir la velocidad y la aceleración hasta quedar en un estado estático. De igual forma las fuerzas que interactúan en el sistema va de máxima a mínima.

Al principio, cuando se libera el bloque de plastilina, una vez que ya hemos analizado los gráficos realizados con la ayuda de GeoGebra, encontramos que tanto la velocidad máxima como la máxima aceleración es en los primeros segundos. Entonces como el tiempo aumenta la velocidad y la aceleración se reducen, hasta que el bloque alcanza un estado estático. Del mismo modo, las fuerzas que interactúan en el sistema van de un máximo a un mínimo.

Figura 13. Interpretación final de Luisa. Equipo "Indeterminado". Fuente: Elaboración propia.

El movimiento es un resorte jalado que regresa y empuja hasta quedarse sin energía donde el inicio donde fue jalado es la máxima amplitud y donde su aceleración va a ser la mayor y después la velocidad máxima y por fricción y otras fuerzas va a decrecer la velocidad y la distancia recorrida hasta que se detenga

El movimiento es un resorte tirado que regresa y empuja hasta que se queda sin energía. Al principio donde se tiró es la amplitud máxima y donde su aceleración será la mayor. A continuación, la velocidad máxima y la fricción y otras fuerzas disminuirán la velocidad y la distancia recorrida hasta que se detenga.

Figura 14. Interpretación final de Efrén. Equipo "Lo que nunca". Fuente: Elaboración propia.

DISCUSIÓN

Las explicaciones dadas por David, Luisa y Efrén al finalizar la actividad fueron más contundentes que las introducidas en la primera etapa de la experimentación. Consideramos que la tarea de modelización motivó el debate científico entre los estudiantes, la socialización de la información y la generación de argumentos. Las diferentes representaciones ofrecidas les permitieron adquirir un lenguaje más rico para su expresión escrita que se puede apreciar en sus últimas explicaciones (Figuras 12 a 14).

Desafortunadamente, el trabajo fisicomatemático no llegó más allá de una comprensión conceptual. Se reconoce la necesidad de dar continuidad a este tipo de actividades con el fin de obtener evidencia de un trabajo fisicomatemático más completo. En cuanto a las expresiones de los estudiantes, hace falta claridad para referirse a la aceleración dado que algunos se apoyaron en el gráfico para interpretarla, pero al parecer ignoraron que la representación sólo ofrece información directa del desplazamiento con respecto al tiempo; para la velocidad, habría que obtener la pendiente de la curva. Ningún participante advirtió que se requiere hacer un gráfico de velocidad contra tiempo para apreciar el comportamiento de

la aceleración. Por otra parte, hacen referencia a una relación entre los máximos, mínimos y las fuerzas, sin explicar sus causas.

Se reconoce que, para comprender plenamente el comportamiento del fenómeno observado, será necesario realizar otras actividades que permitan a los sujetos relacionar el primer orden de variación del desplazamiento con la velocidad y el segundo orden con la aceleración. Nadie hizo referencia a las fuerzas involucradas como causas del movimiento, ni a alguna de las leyes de Newton como principios aceptados para explicar el comportamiento del suceso presentado, lo que evidencia lo parcelado que se presenta el contenido a los estudiantes, a pesar de tratarse de un área de ingeniería.

CONCLUSIONES

El análisis de la forma en que un alumno pasa de la comprensión de un fenómeno físico a su descripción matemática permitió hacer una contribución al constructo teórico de los ETM, el Espacio de Trabajo Físico Matemático (ETFM). Con base en esta propuesta teórica, se puede responder a la pregunta de investigación afirmando que la tarea de modelización matemática de un fenómeno físico experimental desencadena en el

estudiante los procesos de trabajo fisicomatemático siguientes:

Cognitivos: cuando el estudiante pone en práctica su comprensión de los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración, así como la relación con los principios que rigen las causas del movimiento. Los obstáculos epistemológicos que surgen en un caso como ideas previas para la física, o en otro como errores en la interpretación de propiedades y objetos matemáticos, limitan significativamente las relaciones entre los diferentes componentes y desarrollo de procesos en el ETFM y en el ETM^f.

Semióticos de distinta índole y profundidad: porque en principio, el estudiante tiene que reconocer el plano cartesiano como sistema de referencia posicional, dominar sus reglas de significado como registro gráfico, y ubicar un origen que sea útil y práctico para realizar las mediciones y estimaciones necesarias que permitan explicar eficientemente los desplazamientos del oscilador armónico amortiguado. Luego, debe distinguir las curvas continuas, no sólo como representaciones gráficas, sino como objetos matemáticos que sirven para aproximar los comportamientos de los fenómenos naturales. Estas representaciones han de ser traducibles como

cambios de posición y velocidad con respecto al tiempo, reconociendo los caracteres escalar y vectorial de estas magnitudes, asociándolas al movimiento, pero atendiendo a sus causas.

Experimentales: dado que los estudiantes deben llevar a cabo instrumentaciones diversas de forma acelerada para hacer mediciones apropiadas que permitan recuperar información suficiente de los fenómenos naturales de estudio a través de distintas representaciones como tablas o gráficas, que servirán para explicar y predecir su comportamiento.

Discursivos: cuando se promueve una práctica colaborativa entre los estudiantes, motivando la discusión basada en justificaciones que provienen de la interpretación del comportamiento de un fenómeno a partir de sus distintas representaciones y principios que los rigen. El intercambio de ideas entre los estudiantes fue limitado, quizá por la falta de dominio de un lenguaje apropiado, común o incluso institucionalizado, o quizá por la falta de esta práctica en las aulas, lo que revela la necesidad fomentar el debate y la discusión para explorar el discurso científico escolar.

Se confirma que la tarea resultó desafiante para los estudiantes, pero al mismo tiempo les permitió hacer distintos acercamientos a la comprensión del comportamiento del oscilador armónico. El profesor es quien debe reconocer estos avances para motivar el desarrollo del discurso científico escolar que se ha propiciado.

El ETMF está presente cuando un estudiante se enfrenta a la tarea de describir matemáticamente un fenómeno físico. En la modelización, los componentes físicos

y matemáticos deben tenerse en cuenta al diseñar tareas que impliquen trabajo matemático en física. Sin embargo, es deseable la expansión de este estudio para entrar en más tareas de modelización y apreciar el resurgimiento de las relaciones dadas entre los componentes del ETMF descrito y otras que pudieran surgir.

Los resultados del presente estudio permiten asumir que un proceso de *simulación* se inserta en un ETMF (que forma parte del ETMF) mediante la sustitución de las condiciones reales por condiciones controladas. En otras palabras, el ETMF utiliza objetos que obedecen las reglas de la física, para luego sumergirse en el trabajo con los objetos matemáticos, adquiriendo un funcionamiento autónomo.

Finalmente, las actividades de trabajo realizadas entre compañeros generaron espacios para hacer afirmaciones y construir argumentos entre los estudiantes. Esta dinámica les permitió hacer una construcción más completa del modelo que representa el fenómeno observado.

REFERENCIAS

- Asikainen, M. A., y Hirvonen, P. E. (2010). Finnish cooperating physics teachers' conceptions of physics teachers' teacher knowledge. *Journal of Science Teacher Education*, 21(4), 431-450. DOI 10.1007/s10972-010-9187-y
- Artigue, M. (2016). Mathematical Working Spaces through networking lens. *ZDM*, 48(6), 935-939. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0810-z>
- Baird, D. C. (1991). *Experimentación. Una introducción a la teoría de mediciones y al diseño de experimentos*. Prentice Hall.
- Clement, J. J. (2009). The role of imagistic simulation in scientific thought experiments. *Topics in Cognitive Science*, 1(4), 686-710. DOI: 10.1111/j.1756-8765.2009.01031.x
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in mathematics*, 75(2), 213-234. DOI 10.1007/s10649-010-9254-5
- Duit, R. y Treagust, D. F. (2012). How can conceptual change contribute to theory and practice in science education? In Fraser, B., Tobin, K., y McRobbie, C. J. (Eds.), *Second International Handbook of Science Education*. Vol. 24. 107-118. Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-9041-7_9
- Elkins, J. (2011). Visual practices across the University: A report. In Oliver Grau with Thomas Veigl, M. A. (Eds.), *Imagery in the 21st Century*. (pp. 159-161). The MIT Press. DOI:10.7551/mitpress/9780262015721.003.0009
- Galili, I., y Tseitlin, M. (2003). Newton's First Law: Text, translations, interpretations, and physics education. *Science & Education*, 12(1), 45-73. <https://doi.org/10.1023/A:1022632600805>
- González Martín, A. S., Hitt, F., y Morasse, C. (2008). The introduction of the graphic representation of functions through the concept of covariation and spontaneous representations. A case study. *Proceedings of PME 32 and PME-NA 30(3)*, 89-97.
- Halloun, I. A. (2007). Mediated modeling in science education. *Science & Education*, 16(7), 653-697. <https://doi.org/10.1007/s11191-006-9004-3>
- Hitt, F., y Cortés, J. C. (2014). Planificación de actividades en

- un curso sobre la adquisición de competencias en la modelización matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, **10**(1). <https://doi.org/10.18845/rdmei.v10i1.1977>
- Hitt, F. y González Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate, and self-reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, **88**, 201–219. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9578-7>
- Hitt, F.; Quiroz-Rivera, S. (2017). Aprendizaje de la modelación matemática en un medio socio-cultural. *Revista Colombiana de Educación*, **38** (73), 153-177. DOI: [10.17227/01203916.73rce151.175](https://doi.org/10.17227/01203916.73rce151.175)
- Houdement, C. Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175-193.
- Hubber, P., Tytler R. y Chittleborough G. (2018) Representation Construction: A Guided Inquiry Approach for Science Education. In: Jorgensen R., Larkin K. (Eds.), *STEM Education in the Junior Secondary*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5448-8_5
- Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, **38**(3), 302-310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Kelly, G. J., Druker, S. y Chen, C. (1998). Students' reasoning about electricity: Combining performance assessments with argumentation analysis. *International Journal of Science Education*, **20**(7), 849-871. <https://doi.org/10.1080/0950069980200707>
- Kuzniak, A. y Richard, P. R. (2014). Spaces for Mathematical Work: Viewpoints and Perspectives. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME **17** (4-I), 17-27. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1741a>
- Lagrange, J. B., Recio, T., Richard, P. R., Vivier, L. (2017). Specificities of tools and signs in the mathematical work. In I. M. Gómez Chacón, A. Kuzniak, K. Nikolantonakis, P. R. Richard and L. Vivier (Eds.), *Espacio de Trabajo Matemático. Mathematical Working Space. Espace de Travail Mathématique. Actas, Quinto Simposio Internacional. ETM Proceedings Fifth ETM Symposium. Actes Cinquième Symposium ETM*. (pp. 207-217). University of Western Macedonia.
- Machado, J., Braga, M. (2019). A proposta da Redescritção Representacional como referencial para a conceitualização de modelos na educação científica. *Ciência y Educação*, **25** (3), 589-606. <https://doi.org/10.1590/1516-731320190030013>
- Malafosse, D.; Lerouge, A.; Duseau, J. M. (2000). Étude, en inter-didactique des mathématiques et de la physique, de l'acquisition de la loi d'Ohm au collège : espace de réalité. *Didaskalia*, **16**, 81-106. <https://doi.org/10.4267/2042/23903>
- Moutet, L. (2018) Analyse d'une séquence d'enseignement de la relativité restreinte: l'apport du modèle de l'ETM étendu. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **23**, 107–136.
- Moutet L. (2021) The extended theoretical framework of mathematical working space (Extended mws): Potentialities in Chemistry. In: Leung F.K.S., Stillman G.A., Kaiser G., Wong K.L. (Eds), *Mathematical Modelling Education in East and West. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-66996-6_53
- Presmeg, N., Radford, L., Roth, W. M., y Kadunz, G. (Eds.). (2018). *Signs of signification: Semiotics in mathematics education research*. Springer. DOI [10.1007/978-3-319-70287-2](https://doi.org/10.1007/978-3-319-70287-2)
- Redish, E. F. y Kuo, E. (2015). Language of physics, language of math: disciplinary culture and dynamic epistemology. *Science & Education*, **24** (5), 561-590. <https://doi.org/10.1007/s11191-015-9749-7>
- Touma, G. (2009). Une étude sémiotique sur l'activité cognitive d'interprétation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, **14**, 79–101.
- Prain, V. y Tytler R. (2012) Learning Through Constructing Representations in Science: A framework of representational construction affordances, *International Journal of Science Education*, (34) **17**, 2751-2773, DOI: [10.1080/09500693.2011.626462](https://doi.org/10.1080/09500693.2011.626462)
- Vergnaud, G. (1992). Conceptual Fields, Problem Solving and Intelligent Computer Tools. In L. M. De Corte E. (Eds.), *Computer-Based Learning Environments and Problem Solving*. **84**, 287-308. Springer.