

Vol. 19, No. 1

enero-junio 2026

ISSN: 2395-8847

DIGITAL CIENCIA@UAQRO

Universidad Autónoma de Querétaro
Secretaría de Investigación, Innovación y Posgrado



UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
DE QUERÉTARO

DIRECTORIO

Dra. Silvia Lorena Amaya Llano
Rectora
Dra. Oliva Solís Hernández
Secretaria Académica
Dr. Manuel Toledano Ayala
Secretario de Investigación, Innovación y Posgrado
Lic. Diana Rodríguez Sánchez
Directora del Fondo Editorial Universitario

COMITÉ EDITORIAL

Dra. Azucena de la Concepción Ochoa Cervantes
Editora en jefe
Lic. Juliana Romero Rodríguez
Coordinadora editorial
Mtra. Luz Esmeralda Hernández Juárez
Asistente editorial

Ciencias Físico Matemáticas

Dra. Janet Ledesma García
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Ciencias de la Conducta y Educación

Dr. Martín Mora Martínez
Universidad de Guadalajara, México
Dra. Graciela Cordero Arroyo
Universidad Autónoma de Baja California, México
Dra. Addy Rodríguez Betanzo
Universidad Autónoma de Quintana Roo, México

Ciencias Políticas y Sociales

Dra. Adriana Reynaga Morales
Universidad Nacional Autónoma de México, México
Dra. Virginia Guadalupe Reyes de la Cruz
Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca, México

Ciencias Químico Biológicas

Dr. Fernando Chiang Cabrera
Universidad Nacional Autónoma de México, México
Dr. Juan Campos Guillén
Universidad Autónoma de Querétaro, México
Dra. Rosalía Reynoso Camacho
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Ciencias Jurídicas

Dr. Juan Ricardo Jiménez Gómez
Universidad Autónoma de Querétaro, México
Dr. Gerardo Porfirio Hernández Aguilar
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Ciencias de la Salud

Dr. Carlos Arámburo de la Hoz
Universidad Nacional Autónoma de México, México
Dra. Margarita Teresa de Jesús García Gasca
Universidad Autónoma de Querétaro, México
Dra. María Peña Rangel
Universidad Nacional Autónoma de México, México
Dr. Elhadi Yahia Kazuz
Universidad Autónoma de Querétaro, México

Ingenierías y Desarrollo Tecnológico

Dr. José Luis Rivera Armenta
Tecnológico Nacional de México, México

Agropecuarias

Dra. Tercia C. Reis de Souza
Universidad Autónoma de Querétaro, México
Dra. Rosalía Ocampo Velázquez
Universidad Autónoma de Querétaro, México

COMITÉ CIENTÍFICO INTERNACIONAL

Dra. Paula Ascorra Costa
Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
Dr. Domingo Mayor Paredes
Universidad de Murcia, España
Dra. Xus Martín
Universidad de Barcelona, España
Dr. Hugo Becker
Universidad Libre, Colombia

EQUIPO TÉCNICO EDITORIAL

Lic. Karla Gisella Cordero Jiménez
Mtra. Jennifer Tovar González
Correctora de estilo
Lic. Alejandro Zamorano Gómez
Diseñador editorial
Regina Paredes Olaya
Maquetadora editorial
Marcus Ganahl
Fotografía de portada



El diseño de esta revista se financió con recursos de la Universidad Autónoma de Querétaro. Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación. Queda estrictamente prohibida la reproducción total o parcial del contenido e imágenes de la publicación sin plena autorización de la Universidad Autónoma de Querétaro. Comité Editorial de la revista *Digital Ciencia@UAQRO*.

Digital Ciencia@UAQRO, Vol. 19, No. 1, enero-junio 2026, es una publicación semestral editada por la Universidad Autónoma de Querétaro, a través de la Secretaría de Investigación, Innovación y Posgrado, Cerro de las Campanas, s/n, Col. Las Campanas, C.P. 76010, Querétaro, Qro., Tel. (442) 1921200 Ext. 3244, <https://revistas.uaq.mx/index.php/ciencia>, ciencia@uaq.mx Editora responsable: Azucena de la Concepción Ochoa Cervantes. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2024-121612431800-102, ISSN: 2395-8847, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este Número, Secretaría de Investigación, Innovación y Posgrado, Juliana Romero Rodríguez, Cerro de las Campanas, s/n, Col. Las Campanas, C.P. 76010, Querétaro, Qro. Fecha de última modificación: 29 de enero del 2026.

ÍNDICE

Sección:
Miscelánea

- 5 **Presentación editorial**
Dra. Azucena de la Concepción Ochoa Cervantes
- 8 **Evaluación de impacto del ahorro autogestivo en Querétaro: el caso del proyecto Cosecha Colectiva**
Impact evaluation of self-managed savings in Querétaro: the case of the Cosecha Colectiva Project
Mayra Juliana Chávez Alcalá
Eduardo Luna Sánchez
- 32 **Emprendimiento social para la recuperación de saberes ancestrales: la grana cochinilla en Teotitlán del Valle**
Social entrepreneurship for the recovery of ancestral knowledge: the grana cochinilla in Teotitlan del Valle
Irlanda Abigail Matadamas Cruz
Virginia Guadalupe Reyes de la Cruz
- 46 **¿Plaguicidas en Áreas Naturales Protegidas? Evidencia de su uso en la Reserva de la Biosfera Sierra Gorda de Querétaro**
Pesticides in protected areas?
Evidence of their use in the Sierra Gorda Biosphere Reserve, Queretaro
Alexis Vélez-Hernández
Eduardo Luna-Sánchez
Mayra Juliana Chávez-Alcalá
Miguel Ángel Bartorila

67 Moléculas de origen natural con actividad antimicrobiana acopladas a empaques activos para la preservación de alimentos

Molecules of natural origin with antimicrobial activity coupled with active packaging for food preservation

Pedro Jesús Barrón Uribe

José Antonio Cervantes Chávez

88 Obtención de coeficientes de presión en edificios altos por dinámica de fluidos computacional (CFD)

Obtaining pressure coefficients in tall buildings using computational fluid dynamics (CFD)

Citlali Villalobos García

Enrique Rico García

Luis Francisco Pérez Moreno

Iván Fermín Arjona Catzim

105 Generalizaciones de las funciones inframonogénicas en el análisis de Clifford

Generalizations of inframonogenic functions in Clifford analysis

Daniel Alfonso Santiesteban

Ricardo Abreu Blaya

Juan Bory Reyes

Presentación editorial

La presente edición de *Digital Ciencia@UAQRO* ofrece un compendio de investigaciones multidisciplinarias del quehacer científico actual, con temáticas relevantes que abordan desde la organización comunitaria y la preservación cultural, hasta los retos ambientales, la seguridad alimentaria y el alcance y aplicación de las ciencias exactas.

El número da inicio con un trabajo enfocado en la economía social y el desarrollo rural, donde se observa el impacto de los grupos de ahorro autogestivos y se dan a conocer los resultados del proyecto Cosecha Colectiva en Querétaro. Con el uso de herramientas de evaluación formativa, se identificaron 19 grupos liderados mayoritariamente por mujeres, cuya consolidación valida la efectividad de estos modelos para movilizar recursos y fomentar el desarrollo de las comunidades rurales. Cabe señalar que el proyecto aludido fue galardonado con el segundo lugar en la edición 40 del Premio Alejandrina a la Investigación.

En una línea similar, el siguiente artículo, centrado en el patrimonio biocultural, refiere la importancia de rescatar la técnica ancestral de teñido con grana cochinilla entre la población zapoteca de Teotitlán del Valle, Oaxaca. A partir de su labor, las autoras proponen un modelo de emprendimiento social que destaca la acción transformadora de los actores sociales, a la vez que supone una vía para salvaguardar los saberes milenarios y promover el manejo sostenible de la producción textil.

Enseguida, se pone de relieve la salud pública en un entorno natural por medio de una investigación que examina la preocupante presencia de plaguicidas en un segmento de la Reserva de la Biosfera de la Sierra Gorda de Querétaro. Con base en un estudio transversal en el valle agrícola de Concá, se encontraron evidencias del empleo de algunas sustancias químicas altamente peligrosas, así como de prácticas de manejo que arriesgan la salud humana y el ecosistema. Frente a dicho escenario, el grupo científico sugiere un plan de capacitaciones, acompañado de la restricción escalonada del uso de pesticidas en la región. El trabajo a continuación revisa desde una perspectiva biotecnológica la preservación de alimentos. Ante la merma económica ocasionada por la pérdida y desperdicio de alimentos, junto a la creciente demanda de productos frescos, se analiza el efec-



to de empaques activos que incorporan moléculas antimicrobianas de origen natural. Estos materiales se caracterizan por retrasar el proceso de descomposición e inhibir el desarrollo de microorganismos patógenos humanos transmitidos por alimentos, reduciendo la incidencia de enfermedades causadas por dichos agentes.

Más adelante, en el área de ingeniería, se comparten avances sobre un modelo mediante simulaciones en dinámica de fluidos computacional (CFD) aplicado para el diseño de edificios altos. Los resultados del análisis demuestran que al usar malla polyhexacore es posible alcanzar una precisión de hasta un 92% en comparación con estudios experimentales. Este método reduce costos computacionales, además de aportar innovaciones en el ámbito de los simuladores para modelar el comportamiento de flujos.

Cierra esta edición un artículo matemático que gira en torno a las funciones inframonogénicas en el análisis de Clifford, las cuales surgen como una versión no commutativa de las funciones armónicas y se generalizan con una nueva subclase de funciones biarmónicas. En particular, se trata la fórmula integral de Cauchy y un problema de salto, así como la conexión con el sistema de Lamé-Navier, seguido de una serie de problemas de frontera bien planteados y descomposiciones de Fischer. Con esta selección de contenido, la revista reafirma su compromiso con la divulgación del conocimiento, la excelencia académica y la resolución de problemáticas locales y globales. Esperamos que este número sea del agrado de nuestro público lector e incentive el avance de las ciencias más allá de los límites de frontera.

Dra. Azucena de la Concepción Ochoa Cervantes 
Editora en Jefe

**SECCIÓN:
MISCELÁNEA**

Evaluación de impacto del ahorro autogestivo en Querétaro: el caso del proyecto Cosecha Colectiva

Impact evaluation of self-managed savings in Querétaro: the case of the Cosecha Colectiva Project

Mayra Juliana Chávez Alcalá* 

Eduardo Luna Sánchez 

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México

*mayra.chavez@uaq.mx

DOI: 10.61820/dcqua.2395-8847.2003

Fecha de recepción: 15 de agosto del 2025

Fecha de aceptación: 12 de noviembre del 2025

Resumen

Se presenta la evaluación del proyecto Cosecha Colectiva, el cual impulsa el desarrollo rural en Querétaro mediante la promoción de grupos de ahorro autogestivos. El artículo tiene dos objetivos: a) evaluar el impacto social alcanzado por el proyecto en las comunidades participantes y b) demostrar la utilidad de tres herramientas de evaluación formativa (teoría del cambio –*theory of change* o ToC–, registro de pequeñas victorias y reporte de fallas) para medir impactos de corto plazo en investigaciones aplicadas. Se empleó un enfoque mixto que combinó revisión documental, entrevistas semiestructuradas, talleres participativos y reflexión situada del equipo implementador. Los resultados muestran la consolidación de 19 grupos autogestivos liderados principalmente por mujeres, la movilización de más de cuatro millones de pesos en préstamos y la incorporación del modelo en espacios educativos. Asimismo, se observaron dinámicas de adopción tecnológica y respaldo externo mediante financiamiento. La evidencia obtenida confirma el impacto alcanzado por el proyecto y, al mismo tiempo, demuestra la factibilidad de medir indicadores de corto plazo mediante las herramientas utilizadas; por ello, se propone su integración en los procedimientos de evaluación de las universidades públicas.



Palabras clave: evaluación de impacto, grupos de ahorro, pobreza, tecnología social

Abstract

This article presents the evaluation of the Cosecha Colectiva project, which advances rural development in Queretaro by promoting self-managed savings groups. It pursues two objectives: a) to assess the social impact achieved in participating communities, and b) to demonstrate the utility of three formative evaluation tools (teoría del cambio –theory of change or ToC–, a “small wins” log, and failure reporting) for measuring short-term impacts in applied research. A mixed-methods design combined document review, semi-structured interviews, participatory workshops, and situated reflection by the implementation team. The results indicate the consolidation of 19 self-managed groups led predominantly by women, the mobilization of more than four million pesos in internal loans, and the incorporation of the model into educational settings. Evidence of technology adoption dynamics and external support through funding was also observed. The findings confirm the project’s impact and demonstrate the feasibility of tracking short-term indicators using the selected tools; accordingly, their integration into public universities’ evaluation procedures is proposed.

Keywords: impact evaluation, poverty, savings groups, social technology

Introducción

La pobreza es uno de los problemas sociales más complejos y persistentes en el mundo, ya que afecta a 3.6 billones de personas quienes viven con ingresos inferiores a siete dólares diarios (Roelen, 2025). En México, 46.8 millones de personas, equivalentes al 36.3% de la población nacional, se encuentran en situación de pobreza (Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social [CONEVAL], 2022). Ante este escenario, se tiene la expectativa de que la ciencia trabaje con otros actores sociales para desarrollar soluciones frente a este tipo de desafíos. De hecho, en los últimos años ha incrementado la demanda sobre las universidades para que demuestren los beneficios atribuibles a sus investigaciones, es decir, su impacto social (Arocena et al., 2017). Sin embargo, con frecuencia existe una brecha entre la producción de conocimiento científico y su aplicación (Nature, 2020), desconexión que se explica, en parte, por el sistema de evaluación hegemónico que prioriza la productividad académica (medida en cantidad o prestigio

de publicaciones), lo que no siempre garantiza resultados relevantes para la sociedad (Sivertsen y Meijer, 2020).

En este contexto, es crucial integrar otros métodos de evaluación que permitan recopilar evidencia confiable sobre los impactos sociales generados por investigaciones aplicadas. Para responder a esta necesidad, el artículo presenta la autoevaluación del proyecto Cosecha Colectiva, estudio que transfiere tecnología social para promover el desarrollo rural en Querétaro. Este trabajo ha facilitado que mujeres y jóvenes rurales protagonicen su propio proceso de desarrollo al proveer herramientas para 1) administrar grupos de ahorro autogestivos, 2) realizar autodiagnósticos para definir metas personales y 3) acceder a una plataforma de *crowdfunding* que les vincule con donantes nacionales e internacionales.

En ese sentido, la evaluación presentada en este artículo cumple un doble objetivo: primero, generar evidencia sobre el impacto social alcanzado por el proyecto; y segundo, exemplificar el uso de herramientas de evaluación prácticas y adaptables a diversos contextos, que permiten superar algunos desafíos propios del estudio del impacto científico, entre ellos, la latencia con la que se presentan los efectos y la complejidad inherente de procesos en los que no siempre se logran los resultados esperados.

Por lo anterior, el artículo contribuye al debate científico en torno a la evaluación de impacto en proyectos de investigación aplicada. Al articular mecanismos que capturan tanto resultados intermedios como procesos de aprendizaje, el estudio proporciona un ejemplo de aplicación práctica de evaluaciones formativas que miden impactos sociales en horizontes temporales cortos. De esta manera, aporta a la construcción de procedimientos orientados a mejorar la capacidad de rendición de cuentas de las universidades públicas.

El artículo se organiza en cinco apartados. Primero, en la sección conceptual se analizan los retos de evaluar investigaciones aplicadas y se presentan alternativas que combinan la rendición de cuentas con el aprendizaje. En el apartado metodológico se describen tres procedimientos de evaluación: la teoría del cambio (ToC), el registro de pequeñas victorias para identificar efectos inmediatos y el reporte de fallas como herramienta de aprendizaje. En los resultados se desarrolla el caso de impacto del proyecto Cosecha Colectiva: objetivos, actividades, localidades beneficiarias, aliados y logros; además, se detalla su ToC, se enumeran las pequeñas victorias y se expone el reporte de fallas elaborado por el equipo imple-

mentador. La discusión analiza críticamente el lugar que ocupa Cosecha Colectiva frente a otras estrategias de atención a la pobreza y reflexiona sobre la aplicabilidad de las herramientas evaluativas empleadas en universidades públicas. Por último, las conclusiones sintetizan los mensajes centrales del artículo.

Desafíos y posibilidades en la evaluación de investigaciones aplicadas

La evaluación de proyectos de investigación aplicada cumple una doble función, por un lado, proporciona a las y los investigadores información útil sobre la manera en que el conocimiento generado influye en tomadores de decisión y personas beneficiarias, aprendizaje que les permite mejorar el diseño de sus propuestas. Por otro lado, sirve para rendir cuentas a las entidades financiadoras al aportar evidencia sobre los beneficios tangibles que generan los proyectos (Weiβhuhn *et al.*, 2017).

No obstante, el modo en que tradicionalmente se ha evaluado el trabajo científico se ha centrado en la productividad académica, siendo los indicadores de desempeño más comunes el número de artículos publicados o citas recibidas, métricas que han sido valoradas porque son fáciles de cuantificar. Este enfoque, común en la política científica de América Latina, asume que las publicaciones en revistas indizadas y los indicadores de citación constituyen una medida adecuada del valor del conocimiento generado (Vasen y Lujano Vilchis, 2017).

Si bien esta forma de evaluación sirve a una lógica de control jerárquico que requiere resultados auditables y comparables (Eyben, 2014), tiene un alcance limitado para establecer el efecto de los proyectos en la resolución de problemas sociales (Hicks *et al.*, 2015). En el peor de los casos, cumplir con estas métricas puede volverse un fin en sí mismo y desviar los esfuerzos hacia la acumulación de productos académicos sin que estos se traduzcan en beneficios sociales concretos. Esta dinámica ha sido vinculada con comportamientos estratégicos en las y los investigadores, quienes destinan más tiempo a cumplir con criterios orientados a asegurar estabilidad laboral o incentivos económicos que a la implementación de proyectos de largo plazo con potencial transformador (Alonso-Yáñez y Davidsen, 2014; Galaz-Fontes y Gil-Antón, 2013; Suárez-Zozaya y Muñoz-García, 2004).

Ante esta deficiencia, se ha subrayado la necesidad de evaluar no solo los productos académicos, sino también los resultados provocados por las investigaciones en sus contextos de aplicación. Algunos abordajes han medido la adopción de

innovaciones como proxy del impacto social, mientras que otros han utilizado métodos econométricos para aislar el efecto del conocimiento científico en la generación de beneficios económicos, calculando el retorno de la inversión en los proyectos financiados (Hall *et al.*, 2003). Sin embargo, estos enfoques también enfrentan limitaciones. Una de ellas es la latencia con que suelen manifestarse los impactos de las investigaciones aplicadas. En muchos casos, los cambios que se busca generar requieren varios años para materializarse, por lo que resulta injusto e inviable evaluar la efectividad de un proyecto únicamente a largo plazo, especialmente cuando la mayoría de los proyectos se financian por períodos menores a dos años (Oslo Institute for Research on the Impact of Science [OSIRIS], 2016).

Además, estas evaluaciones tienden a basarse en una visión lineal del cambio, que supone una progresión ordenada entre la generación de conocimientos (*output*), su adopción (*outcome*) y su impacto. Dicha lógica simplificada no toma en cuenta la complejidad inherente a las investigaciones aplicadas, en las que los avances no siguen trayectorias predecibles y suelen estar marcados por retrocesos, adaptaciones y aprendizajes. Al enfocarse únicamente en los resultados finales, este tipo de evaluación pierde de vista el valor de los procesos intermedios y las lecciones que estos pueden ofrecer (Ekboir, 2003).

La evaluación del impacto, por tanto, requiere superar estos modelos simplistas y capturar la complejidad dinámica del cambio. En respuesta, han surgido enfoques formativos centrados en las interacciones entre quienes investigan y quienes utilizan el conocimiento. De acuerdo con esta perspectiva, las evaluaciones precisan registrar los medios a través de los cuales las y los investigadores comparten el conocimiento, así como las evidencias de que estas interacciones fueron valoradas por otros actores, por ejemplo, la firma de convenios, la participación en comités asesores o la asignación de recursos adicionales por parte de socios estratégicos (LSE Public Policy Group, 2011). El análisis de estos vínculos permite reconstruir procesos de cambio que no necesariamente se traducen en grandes transformaciones inmediatas, pero que se pueden observar como un conjunto de interacciones productivas que configuran trayectorias de impacto (Spaapen y Van Drooge, 2011).

Adicionalmente, estos enfoques permiten una retroalimentación constante de los proyectos, al incorporar procesos de autoevaluación para reflexionar sobre el cambio logrado, identificar aprendizajes clave y plantear ajustes a futuro (Van der

Meulen *et al.*, 2010). De esta manera, cuando se valoran tanto los aciertos como los fracasos, se comprenden mejor los factores que facilitan o dificultan el logro del impacto (Ekboir, 2003). En última instancia, revalorizan el papel de las y los investigadores, no solo como generadores de conocimiento, sino como agentes activos en procesos de transformación social.

En consonancia con lo anterior, las evaluaciones de proyectos de investigación aplicada que buscan generar soluciones innovadoras frente a la pobreza deben redefinir el éxito como la suma de pequeños avances acumulativos, no como el cumplimiento inmediato de metas finales. Este enfoque resulta especialmente pertinente al evaluar el proyecto Cosecha Colectiva, pues los impactos deseados suelen emerger gradualmente en la calidad de vida de mujeres y jóvenes rurales, como mejoras en salud, educación o ingresos.

Materiales y métodos

El apartado describe los métodos y técnicas empleadas para evaluar el impacto del proyecto de investigación Cosecha Colectiva. De manera específica, se detalla cómo se utilizaron tres herramientas evaluativas: la ToC, el registro de pequeñas victorias y el reporte de fallas.

La evaluación, a partir de un estudio de caso, permitió rastrear los procesos que llevaron a efectos específicos sobre las personas beneficiarias y aliadas. En el estudio se emplearon técnicas mixtas que incluyeron el análisis documental, entrevistas semiestructuradas y talleres participativos con beneficiarios y socios clave del proyecto. Además, se recogieron testimonios de las usuarias y reflexiones del equipo investigador sobre su propia experiencia en el proyecto, lo que permitió una visión integral de los resultados y áreas de mejora (Tabla 1).

Tabla 1

Técnicas de recolección de información empleadas en la evaluación

Técnica	Descripción
Revisión documental	Se exploró la documentación existente del proyecto a través de su página web y registros internos. Esta revisión abarcó convenios, informes técnicos y bases de datos sobre cambios en grupos de ahorro.
Entrevistas y talleres participativos	Se aplicó una entrevista semiestructurada con actores clave identificados previamente (beneficiarios y socios estratégicos), lo que permitió recolectar información cualitativa sobre la percepción del impacto por parte de los involucrados.
Reflexión situada	El equipo de investigadores, como evaluadores de su propio proyecto, utilizaron su experiencia personal para identificar logros y áreas de mejora. Aunque esta perspectiva tiene el riesgo de incurrir en sesgos asociados al interés personal (Scriven, 2005), permite acceder a información detallada sobre los procesos internos. La autoevaluación concilia los propósitos de aprendizaje y rendición de cuentas, entendiendo que esta última no solo se limita a satisfacer demandas externas, sino que también abarca una dimensión intrínseca de responsabilidad hacia los propios objetivos (Ebrahim, 2003). Así pues, desde una perspectiva amplia la rendición de cuentas implica ser capaces de mejorar la efectividad del proyecto a través del aprendizaje derivado de evaluaciones.

Fuente: elaboración propia

Construcción de la ToC del proyecto

La ToC es una herramienta evaluativa que ayuda a determinar claramente cómo se supone que las actividades del proyecto generarán los resultados deseados (Funnel y Rogers, 2011). Resulta valiosa porque permite clarificar objetivos, desarrollar indicadores específicos y probar hipótesis críticas. Para el proyecto Cosecha Colectiva, esta representación sigue una adaptación del plan de impacto propuesto por Reed (2021). Este proceso implicó conectar explícitamente los conocimientos generados por el proyecto mediante una matriz lógica que incluyó actividades, indicadores de interacción exitosa (pequeñas victorias) e indicadores para establecer el progreso hacia objetivos de incidencia.

Evaluación mediante pequeñas victorias

Las pequeñas victorias constituyen una herramienta que permite valorar cambios modestos pero significativos y visibles que señalan el avance hacia objetivos mayores (Termeer y Dewulf, 2019). Además, facilita la identificación temprana de logros, puesto que proporciona evidencia concreta que puede motivar a los actores involucrados y generar réplicas. Distinguir

pequeñas victorias implicó documentar las interacciones productivas con beneficiarios y aliados del proyecto. Esto se realizó a través de indicadores que capturaron cambios visibles en comportamientos, habilidades y acuerdos. Asimismo, se recolectó evidencia de reconocimiento externo, como la obtención de financiamiento adicional o la adopción de la metodología por parte de terceros (Spaapen y Van Drooge, 2011).

Reporte de fallas

El reporte de fallas permite documentar con claridad errores y dificultades, convirtiéndolos en fuentes de aprendizaje organizacional que facilitan el manejo adaptativo de los proyectos (Engineers Without Borders [EWB], 2017). Para implementar esta herramienta en el proyecto, se adoptó la metodología propuesta por la organización Fail Forward.

Resultados

En este apartado se presenta la evaluación del impacto del proyecto Cosecha Colectiva, organizada en cuatro secciones complementarias que permiten comprender cómo se generaron los cambios en las comunidades involucradas. Se comienza con la exposición del caso de impacto, donde se describen acciones realizadas, personas involucradas y resultados alcanzados. A continuación, se explica cómo se diseñó y aplicó la ToC del proyecto, que sirve como hoja de ruta para verificar la obtención de resultados. Después, se detallan las pequeñas victorias directas, indirectas y financieras que se acumularon para generar un impacto más amplio. Finalmente, se presenta el reporte de fallas del proyecto, en el cual se abordan con transparencia las dificultades y los errores encontrados durante la ejecución, además se expone cómo se transformaron en aprendizajes para mejorar el diseño de futuras intervenciones.

Caso de impacto Cosecha Colectiva

En los últimos años, los servicios microfinancieros han sido uno de los mecanismos más extendidos para fomentar el desarrollo en áreas rurales, ya que facilitan que las personas, especialmente las mujeres, accedan a recursos y participen en la toma de decisiones para atender sus necesidades básicas (Herrera-García, 2019; Mora-Rivera y García-Mora, 2018). Esto es así debido a que a través de la inclusión financiera se promueve el ahorro y el acceso a préstamos, lo que genera oportunidades para mejorar el bienestar, mitigar adversidades y desarrollar capacidades (Duvendack y Mader, 2020). Sin embargo, los habitantes de zonas rurales con frecuencia enfrentan barreras para acceder a servicios financieros formales (Beyene y Dinba-

bo, 2019). En México, según la Encuesta Nacional de Inclusión Financiera 2024, los grupos más excluidos son los hablantes de lenguas indígenas (58.2%) y los residentes en localidades menores a 15 mil habitantes (65.5%).

Adicionalmente, las limitaciones de los esquemas tradicionales de microcréditos incluyen reglas definidas por agentes externos, altos intereses y técnicas abusivas de cobro, en detrimento de los objetivos de desarrollo originales (Duvendack y Mader, 2020). Frente a estos desafíos, han surgido iniciativas que colocan a las personas en situación de pobreza como protagonistas en la gestión de sus propios recursos, a través de la formación de grupos autogestivos de ahorro y préstamo. Este modelo, desarrollado originalmente en África por Care International y ampliamente replicado en América Latina, permite que los involucrados manejen sus propios recursos para otorgarse préstamos internos, de manera que se incrementan su autonomía y capital social (Martín, 2014; Rodríguez-Ferrera, 2006; Torcat Rivas *et al.*, 2011).

Los *grupos de ahorro comunitarios* funcionan mediante normas internas que regulan las aportaciones, tasas de interés, plazos y condiciones para la entrada y salida de miembros. Los integrantes asumen roles rotativos de liderazgo y administración, lo que fortalece la cohesión social y fomenta la responsabilidad compartida. A diferencia de esquemas informales como las “tandas”, los ahorros en este tipo de esquema crecen progresivamente al generar dividendos reales para sus participantes e impulsar proyectos comunitarios (Martín, 2014; Rodríguez-Ferrera, 2006).

Con la finalidad de promover el desarrollo rural en Querétaro, el proyecto de investigación Cosecha Colectiva ha puesto a prueba diversas innovaciones que integran este modelo de ahorro comunitario con herramientas digitales. El trabajo pone énfasis en el protagonismo de mujeres y jóvenes rurales, promueve la definición de metas de desarrollo e impulsa la gestión directa de recursos para alcanzarlas. La hipótesis a validar con las intervenciones es que la participación en grupos de ahorro autogestivos fortalece la percepción de autoeficacia, así como las capacidades organizativas y financieras de habitantes rurales en Querétaro.

Cosecha Colectiva actualmente acompaña a 19 grupos en los municipios de Arroyo Seco, Jalpan de Serra, Landa de Matamoros, Cadereyta de Montes y Querétaro, quienes han gestionado préstamos por más de cuatro millones de pesos, los cuales se han invertido principalmente en el mejoramiento

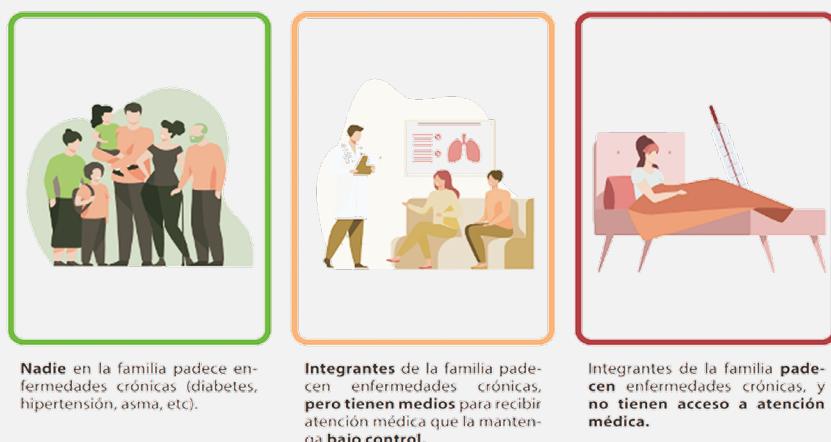
de la vivienda, atención médica, educación y emprendimientos productivos. Además, se ha trascendido el ámbito comunitario para integrarse como componente pedagógico en un programa de licenciatura de la Universidad Autónoma de Querétaro y en un telebachillerato rural. Este enfoque educativo permite a los estudiantes desarrollar competencias de liderazgo, trabajo en equipo, resolución de conflictos y emprendimiento.

Entre las innovaciones específicas puestas a prueba, destacan las adaptaciones metodológicas para facilitar la participación de personas con distintos niveles educativos, de forma que se fortalece la inclusión social. Asimismo, se desarrolló una [aplicación móvil](#) que optimiza la administración de los grupos, reduce errores de registro y genera datos clave para la evaluación continua del proyecto (Chávez Alcalá et al., 2024). Otra herramienta validada fue la adaptación del semáforo de la pobreza (Fundación Paraguaya, 2014). El proceso permite establecer prioridades en áreas como ingresos, educación, salud y vivienda, así como conectar con capacidades grupales para concretar un plan de acción autofinanciable (Figura 1).

Figura 1

Indicador del autodiagnóstico

2.2 Enfermedades crónicas



Fuente: elaboración propia con base en el semáforo de la pobreza (Fundación Paraguaya, 2014)

La etapa de autodiagnóstico funciona como instrumento de introspección personal, ya que permite que cada participante reflexione sobre su situación de vida y las metas que desea alcanzar cuando se responde cada reactivo. También sirve como herramienta colectiva, pues al agregar la información

individual se genera un perfil de la situación del grupo. Esto facilita la identificación de problemas comunes y la creación de estrategias que beneficien simultáneamente a varios integrantes. La herramienta constituye así una línea de base, la cual se estructura a partir de la aplicación del [Semáforo del Buen Vivir](#), que sirve para identificar cambios a lo largo del tiempo y aportar evidencia tangible de las mejoras conseguidas tanto a los grupos como a los donantes del proyecto.

Este autodiagnóstico se está implementando con estudiantes de licenciatura, lo que permite dar seguimiento a cambios específicos en lo académico, la preparación para la transición al mercado laboral y el acceso a recursos tecnológicos. Próximamente, se extenderá también a productores agropecuarios, con la intención de evaluar dimensiones clave como acceso a mercados, agregación de valor y asociatividad, ampliando así el alcance y utilidad de la herramienta en diversas poblaciones beneficiarias.

Finalmente, con apoyo financiero de la Secretaría General Iberoamericana, se desarrolló una [plataforma digital de crowdfunding](#), actualmente en fase piloto, diseñada para ampliar el acceso a financiamiento externo. Esta plataforma permitirá a los grupos utilizar sus ahorros internos como contrapartidas y acelerar la captación de recursos adicionales mediante donaciones que fortalecerán la ejecución de proyectos comunitarios.

ToC del proyecto Cosecha Colectiva

Originalmente, la ToC del proyecto se diseñó en 2022 para participar en una convocatoria. Desde entonces ha sido central para la estrategia de evaluación de Cosecha Colectiva, pues facilita la identificación de indicadores que se pueden monitorear en el corto y mediano plazo, así como la verificación con evidencia empírica si se cumplen o no las hipótesis formuladas. Esta se integra por tres componentes principales: 1) grupos de ahorro, 2) ruta positiva y 3) plataforma de crowdfunding. Cada uno representa un conjunto de innovaciones puestas a prueba.

El primer componente se centra en la conformación de grupos de ahorro autogestivos, donde las personas se capacitan para administrar sus propios recursos. La ToC plantea que, a través de reuniones de capacitación y sesiones de acompañamiento, podría observarse como resultado inmediato la conformación de grupos. En una etapa posterior, se podría apreciar su operación autónoma sin la presencia de facilitadores y la replicación del modelo con nuevos grupos. A largo plazo, se hipotetizó que este proceso contribuiría al uso de la red de ahorro para atender por cuenta propia sus necesidades.

El segundo componente, la ruta positiva, consiste en una herramienta de autodiagnóstico que permite a los grupos de ahorro identificar sus principales carencias y establecer metas de mejora en dimensiones clave del bienestar. En la ToC se anticipó que la disposición a realizar esta autoevaluación representaría una primera señal de apropiación de la herramienta. Posteriormente, se esperaría que los resultados del diagnóstico sirvan a los grupos para guiar decisiones de inversión. Como resultado de mayor alcance, se planteó que la ejecución de los planes de acción impactaría en múltiples indicadores asociados al bienestar de los participantes.

El tercer componente consiste en una plataforma de *crowdfunding* diseñada para conectar los proyectos de los grupos con donantes. Aunque aún se encuentra en etapa piloto, la ToC permite establecer los cambios esperados. En un primer nivel, se pretende que las y los integrantes de los grupos aprovechen este mecanismo de financiamiento mixto para proponer causas en la plataforma. A la vez, se busca que exista una red de donantes con interés en respaldar las iniciativas de los grupos. En un siguiente nivel, se espera que quienes participen rindan cuentas sobre los avances en sus proyectos y que la red de donantes se sostenga en el tiempo.

La Tabla 2 sintetiza esta representación y señala para cada componente la conexión causal entre las actividades previstas y la evidencia del proceso de cambio que se espera observar en el corto (pequeñas victorias), mediano (progreso hacia la incidencia) y largo plazo (transformación deseada) (Figura 2).

Tabla 2
ToC del proyecto

Componente 1: Grupos de ahorro			
Actividades de interacción	Evidencia de interacción exitosa (pequeñas victorias)	Evidencia de progreso hacia incidencia	Evidencia de impacto
Reuniones para explicar en qué consisten y cómo se manejan los grupos de ahorro. [n.º de reuniones]	Se conforman grupos de ahorro liderados por mujeres rurales. [n.º de grupos conformados]	Replicación de la metodología (grupos conformando nuevos grupos). [n.º de solicitudes de formación de nuevos grupos]	El modelo fortalece la agencia y percepción de autoeficacia de quienes participan. [cambio más significativo / encuesta autoeficacia]
Talleres para la transferencia de la metodología. [n.º de talleres]	Las socias están ahorrando de manera regular. [ahorros mensuales en el grupo]	Desarrollo de habilidades para la educación financiera. [métricas de ahorro-préstamo / objetivos de los préstamos]	Cambios en indicadores multidimensionales de pobreza (ingresos, salud, vivienda, educación, participación). [semáforo]
Reuniones de acompañamiento. [n.º de reuniones]	Las socias están solicitando préstamos. [n.º de préstamos anuales / \$ monto / relación ahorro-préstamo]	Desarrollo de habilidades para el liderazgo y la organización. [acuerdos del grupo / entrevistas personales y grupales]	
Encuentros intergrupales para intercambio de experiencias. [n.º de encuentros]	Los grupos se han apropiado de la metodología. [meses consecutivos sesionando sin la presencia de un facilitador / diseño de acuerdos ad hoc en función de las características del grupo / disminución de errores en el registro de la información]	Fortalecimiento de su capital social. [proyectos conjuntos / entrevistas personales y grupales]	
Difusión del modelo a través de una estrategia digital para establecer contacto con más personas aliadas y facilitar la apertura de más grupos. [n.º de interacciones mediadas por la página web y las campañas de redes sociales]			

Componente 2: Ruta positiva			
Reuniones para facilitar la aplicación del autodiagnóstico. [n.º de reuniones]	Las socias están dispuestas a realizar el autodiagnóstico. [línea de base de indicadores]	Las socias solicitaron préstamos en su grupo para llevar a cabo sus planes de acción. [objetivos de préstamos]	El modelo fortalece la agencia y percepción de autoeficacia de quienes participan. [cambio más significativo / encuesta autoeficacia]
Componente 3: Plataforma de crowdfunding			
Reuniones para explicar cómo postular y manejar una causa a la plataforma. [n.º de reuniones]	Las socias eligen un proyecto conjunto con base en la identificación de necesidades comunes. [planes de acción]	Las socias comparten cómo han avanzado con la ejecución de sus planes y reciben retroalimentación. [documentos con ajustes en los planes]	El modelo fortalece la agencia y percepción de autoeficacia de quienes participan. [cambio más significativo / encuesta autoeficacia]
Seguimiento de causas financiadas para que se sigan los procedimientos requeridos. [n.º reuniones]	Las socias solicitaron préstamos en su grupo para llevar a cabo sus planes de acción colectivos. [objetivos de préstamos / monto de préstamos]	Una vez resuelto el problema, las socias comienzan de nuevo seleccionando una nueva meta. [n.º de planes de acción]	Cambios en indicadores multidimensionales de pobreza (ingresos, salud, vivienda, educación, participación). [semáforo]
	Las socias someten una causa en la plataforma para recibir financiamiento. [n.º de causas financiadas]	Donantes vuelven a aportar. [base de datos donantes / entrevista a donantes / \$ recibido en cuenta PayPal]	
	Recepción de donativos. [\$ recibido en cuenta PayPal]		

Fuente: elaboración propia

Figura 2

Conexión causal de los elementos de la ToC

**Fuente:** elaboración propia

**Pequeñas victorias:
evidencias acumulativas
del cambio**

Dada la latencia con la que se presentan ciertos impactos, la evaluación del proyecto consideró la identificación de pequeñas victorias, entendidas como evidencias visibles de avance que, aunque modestas, contribuyen de forma acumulativa a lograr los objetivos del proyecto. De acuerdo con el marco propuesto por Spaapen y Van Drooge (2011), estas victorias se organizaron en tres tipos: directas, indirectas y financieras. Todas ellas son susceptibles de identificarse a través de indicadores y representan puntos críticos de avance que validan hipótesis planteadas en la ToC del proyecto Cosecha Colectiva.

**Pequeñas victorias
directas**

Estas victorias se refieren a cambios observables en el comportamiento, mismos que reflejan la adopción o aceptación de las herramientas por parte de actores clave involucrados directamente en la implementación del proyecto. A continuación, se enlistan los más relevantes.

- Consolidación de 19 grupos autogestivos, que sesionan mensualmente sin la presencia de los facilitadores. Los grupos más antiguos se han reunido por más de 80 meses consecutivos.
“En estos seis años, en lugar de que se salgan, se han integrado más personas. En lugar de separarnos, nos unimos” (entrevista a mujer participante).
- Incremento regular del fondo de ahorro, recurso con el que se han otorgado más de cuatro millones en préstamos, destinados principalmente a vivienda, salud, educación y emprendimientos productivos. “Antes sólo tenía la ilusión de mejorar mi casa, pero gracias al grupo logré arreglar mi cocina con cemento y block. Se logró más rápido y con menos estrés” (entrevista a mujer participante).

- Adopción del modelo en espacios educativos como teleba-chilleratos rurales y la licenciatura en Producción Agropecuaria Sustentable de la Universidad Autónoma de Querétaro. Esto puede mostrarse con la [integración de la metodología dentro del currículo](#) y con indicadores de desempeño de los grupos. “Es importante que desde el primer semestre se hagan aportaciones que en el futuro den el rendimiento para pagar viajes, prácticas, incluso proyectos semestrales que se puedan presentar en congresos” (entrevista a estudiante).
- Colaboración interdisciplinaria con investigadores de la UAQ pertenecientes a la Facultad de Informática (Centro de Desarrollo de Software) y a la Facultad de Filosofía (Laboratorio de Educación y Mediación Intercultural, Programa de Humanidades y Producción de Imágenes), así como de la Universidad de Princeton, quienes contribuyeron a la generación de software, [dashboards](#) y [material audiovisual](#).

Pequeñas victorias indirectas

Las pequeñas victorias indirectas aluden a dinámicas emergentes no previstas explícitamente en la planificación, pero que amplifican y consolidan el proceso de cambio. Estos resultados muestran que la metodología ha sido adoptada por las y los participantes y diseminada a través de redes de confianza, de modo que se extiende el alcance del proyecto. Se identificaron las siguientes:

- Formación espontánea de nuevos grupos de ahorro, impulsada por la recomendación entre pares, es decir, integrantes invitan a familiares o amistades a replicar la experiencia.
- Ajustes autónomos a las reglas internas de los grupos, sin necesidad de intervención externa, que refleja la apropiación de la metodología.
- Participación de egresadas de la licenciatura en Producción Agropecuaria Sustentable como replicadoras de la metodología en su ámbito laboral.
- Adopción de la tecnología por organizaciones de la sociedad civil (Jalpan de Serra y Landa de Matamoros), trascendiendo el ámbito del equipo implementador.

Pequeñas victorias financieras

Finalmente, se registraron pequeñas victorias financieras, las cuales reflejan el respaldo de actores externos que reconocen el valor del proyecto y aportan recursos para su sostenibilidad y expansión. Es posible demostrar este tipo de interacción productiva a través de convenios de colaboración y proyectos con financiamiento externo:

- Financiamiento del gobierno estatal y de organismos internacionales para el desarrollo de la aplicación móvil y la plataforma de crowdfunding.
- Apoyo financiero de OSC (CEIBAS y Juchari Phikuntskua) para realizar la prueba de concepto y la transferencia tecnológica de la aplicación móvil.
- Asignación de recursos por un gobierno municipal, que adoptó la tecnología como parte del plan de trabajo de la Dirección de Desarrollo Agropecuario.

Fallando hacia adelante:
Lecciones aprendidas
del proyecto
Cosecha Colectiva

El análisis de las fallas durante la implementación del proyecto Cosecha Colectiva constituye una fuente de aprendizaje organizacional. Al seguir la metodología desarrollada por Fail Forward, el equipo sistematizó las principales desviaciones e identificó lecciones útiles para mejorar la estrategia del proyecto. Estas se enlistan a continuación.

1. Fallas de comunicación con programadores: al iniciar el desarrollo de la aplicación móvil se subestimó la complejidad de la comunicación interdisciplinaria, por lo que se presentaron retos al definir los requerimientos, periodos de entrega y dinámicas de trabajo. Esto derivó en retrasos y avances fragmentarios. Aprendimos que la colaboración entre diversas disciplinas no es intuitiva y requiere el establecimiento de solicitudes técnicas precisas, reuniones regulares para revisión y clarificación, y roles puente capaces de traducir los lenguajes técnicos y sociales involucrados.
2. Limitaciones de Android: nuestro diseño inicial había asumido incorrectamente que la plataforma de Android cubriría la mayoría de las necesidades, pero en las comunidades había una diversidad de plataformas que limitó el acceso a usuarios con otros sistemas operativos. Aprendimos que se requiere realizar una investigación inicial de forma que los requerimientos no se basen en supuestos.
3. Conflictos internos en los grupos: la construcción de consensos entre los grupos de ahorro no puede darse por sentada. Se presentaron conflictos por diferentes expectativas y situación socioeconómica, por ejemplo, al excluirse a las personas más vulnerables debido a montos de ahorro obligatorios. Por ello, se identificó que la transferencia de la metodología debe incluir módulos formativos para resolver conflictos y mecanismos de toma de acuerdos equitativos.

4. Uso reactivo de préstamos: muchos grupos utilizaban los préstamos para cubrir urgencias inmediatas, sin pensar en inversiones de mediano plazo. Esto motivó la incorporación de los componentes de la ruta positiva y la plataforma de *crowdfunding* como herramientas de planificación orientadas al futuro deseado.

Esto reafirma que el camino hacia el impacto no es lineal. La ToC del proyecto debe concebirse como una hipótesis dinámica, constantemente refinada a partir de la experiencia en campo. Documentar los errores implica identificar oportunidades para innovar y construir soluciones más robustas y pertinentes.

Discusión

Este apartado analiza de manera crítica el sitio que ocupa Cosecha Colectiva en relación con otras estrategias para atender la pobreza. Además, mediante el estudio del caso, se propone incorporar las herramientas evaluativas utilizadas para gestionar proyectos de investigación aplicada financiados por universidades públicas.

Cosecha Colectiva integra varias innovaciones que se alinean con debates contemporáneos sobre agencia y pobreza. Frente a los modelos tradicionales de microcrédito, que a menudo reproducen dinámicas de endeudamiento y dependencia sin modificar estructuras de exclusión (De Carvalho y Roelen, 2025; Duvendack y Mader, 2020), Cosecha Colectiva forma parte de una serie de iniciativas que plantean una alternativa basada en la autogestión financiera y el fortalecimiento del capital social de las comunidades (Martín, 2014; Rodríguez-Ferrera, 2006).

El proyecto también responde a la problemática del sesgo del presente, que limita la capacidad cognitiva para planificar y tomar decisiones de largo plazo en hogares que experimentan pobreza (Mullainathan y Shafir, 2013). Componentes como la ruta positiva mejoran alternativas existentes (Fundación Paraguaya, 2014) al proporcionar elementos visuales que, lejos de enfatizar las carencias, promueven planes de mejora basados en los recursos de los grupos de ahorro. En ese sentido, una contribución del proyecto es que impulsa el crecimiento progresivo de las metas y objetivos basados en acciones concretas y factibles (Lybbert y Wydick, 2018), lo que refuerza la percepción de autoeficacia de las y los participantes, así como su disposición a invertir en proyectos de mejora a largo plazo.

La incorporación de elementos provenientes de modelos de graduación de la pobreza y “empatía práctica” también es

visible en el diseño del proyecto (Banerjee *et al.*, 2015; Roelen, 2025). Esto se debe a que la propuesta combina el fomento del ahorro, el fortalecimiento de capacidades, el acompañamiento continuo y el acceso a recursos adicionales, lo cual refleja un abordaje integral que ha mostrado ser significativamente más efectivo que intervenciones aisladas (De Carvalho y Roelen, 2025).

Asimismo, Cosecha Colectiva confronta uno de los riesgos de programas de este tipo: la tendencia a trasladar la responsabilidad del cambio exclusivamente al individuo, invisibilizando las estructuras que limitan sus opciones (Roelen, 2025). En el proyecto, la agencia individual es promovida no como sustituto, sino como complemento de un entorno de soporte que reconoce las restricciones materiales que enfrentan las comunidades rurales, al mismo tiempo que pone especial énfasis en los recursos del grupo para desarrollar estrategias acordes a las necesidades de sus integrantes (adaptación progresiva de los acuerdos grupales, apoyo entre pares, intercambios de experiencias entre grupos, etcétera). El acceso a mecanismos de financiamiento, la incorporación de tecnología accesible y la generación de vínculos con asociaciones de donantes y aliados estratégicos crean un ecosistema de apoyo que amplía de manera efectiva el espacio de posibilidades de las y los participantes.

Consideramos que la evaluación del impacto del proyecto ilustra la utilidad práctica de tres herramientas específicas: la ToC, la documentación de pequeñas victorias y el reporte de fallas. Estas herramientas permiten una evaluación integral y dinámica del impacto social generado por proyectos aplicados, lo que contrasta con enfoques tradicionales centrados en indicadores académicos (Sivertsen y Meijer, 2020).

En particular, la ToC proporciona una representación clara y estructurada del proceso esperado de transformación social, que valida hipótesis utilizando la medición de indicadores. Por su parte, la documentación de pequeñas victorias complementa esta herramienta al identificar indicadores en el corto plazo, ya que atiende los problemas latentes en la generación de impactos. Finalmente, el reporte de fallas posiciona el aprendizaje derivado de las evaluaciones aplicadas a las y los propios investigadores, quienes tienen incentivos para hacer adaptaciones de forma que sus proyectos sean cada vez más efectivos.

Dada la información que generan y la adaptabilidad de estas herramientas, se considera pertinente que las universidades

públicas las integren en sus procesos de evaluación de investigaciones aplicadas. En específico, se propone que el impacto social sea evaluado con base en indicadores de interacción productiva directa, indirecta y financiera, integrados *ex ante* en teorías del cambio que formen parte de los requisitos para postular proyectos de investigación aplicada. El medio de rendición de cuentas *ex post* sería una autoevaluación donde las y los investigadores sinteticen el cambio que han conseguido, valoren la efectividad de los mecanismos de intercambio, identifiquen desviaciones y acuerden acciones correctivas para obtener mejores resultados.

Para impulsar estos cambios podrían promoverse cursos formativos que desarrollen las capacidades para evaluar a las y los investigadores que realizan proyectos de ciencia aplicada. Esto no solo proveería las herramientas y facilitaría su uso, sino que también fomentaría la valoración de los cambios al justificar su pertinencia. Esta integración metodológica mejoraría significativamente la calidad y relevancia de las investigaciones aplicadas, mostraría un mayor compromiso institucional y facilitaría un diálogo más fructífero entre la academia y la sociedad. Además, permitiría a las universidades responder mejor a las demandas crecientes de demostrar impactos sociales tangibles, reforzando así su rol como agentes efectivos de transformación social.

Conclusiones

El estudio se centró en la evaluación de impacto del proyecto Cosecha Colectiva, una metodología de investigación aplicada que promueve el desarrollo rural en Querétaro. A través de ella se mostró que el impacto social de investigaciones que buscan atender la pobreza puede ser demostrado en el corto plazo mediante la acumulación de pequeñas victorias. La formación de 19 grupos de ahorro autogestivos liderados, principalmente, por mujeres y jóvenes rurales en Querétaro, el uso de tecnología social y el desarrollo de planes de acción prueban que es posible construir capacidades organizativas y financieras desde los propios actores comunitarios. A estos resultados se suman logros como la movilización de más de cuatro millones de pesos en préstamos internos, la operación autónoma de algunos grupos durante más de 80 meses y la integración del modelo en espacios educativos.

El uso de herramientas de evaluación formativa (ToC, registro de pequeñas victorias y reporte de fallas) permitió recabar los procesos intermedios que contribuyeron a estos resultados, de

modo que se evidenció la importancia de complementar esquemas de evaluación centrados exclusivamente en productos académicos. En ese sentido, el estudio refuerza la necesidad de emplear procedimientos alternativos para documentar los impactos sociales de investigaciones aplicadas, los cuales consideren también los procesos, adaptaciones y aprendizajes que fueron necesarios para conseguirlos. Avanzar en esta dirección permitiría a las universidades públicas rendir cuentas en torno de su responsabilidad de actuar en la generación de conocimientos que contribuyan a resolver las principales problemáticas que enfrenta nuestro país.

Como método de implementación en el ámbito universitario, se propone la incorporación explícita de herramientas de evaluación de impacto en las convocatorias de financiamiento para proyectos de investigación y/o vinculación. En tal sentido, las bases de la convocatoria deberían exigir que cada proyecto presente una ToC con indicadores de impacto de corto, mediano y largo plazo, acompañada de un plan de seguimiento. Con ello, la evaluación trascendería los informes convencionales de actividades y permitiría rendir cuentas con base en el impacto social.

Referencias

- Alonso-Yáñez, G. y Davidsen, C. (2014). Conservation science policies versus scientific practice: evidence from a Mexican Biosphere Reserve. *Human ecology review*, 20(2), 3-29.
- Arocena, R., Goransson, B. y Sutz, J. (2017). *Developmental Universities in Inclusive Innovation Systems: Alternatives for Knowledge Democratization in the Global South*. Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-64152-2>
- Banerjee, A., Duflo, E., Goldberg, N., Karlan, D., Osei, R., Parienté, W., Shapiro, J., Thuysbaert, B. y Udry, C. (2015). A multifaceted program causes lasting progress for the very poor: evidence from six countries. *Science*, 348. <https://doi.org/10.1126/science.1260799>
- Beyene, N.L., y Dinbabo, M.F. (2019). An empirical evaluation of the link between women participation in Village Savings and Loans Association (VSLA) and poverty reduction in Ethiopia. *Journal of Reviews on Global Economics*, 8, 566-580. <https://ideas.repec.org/a/lif/jrgelg/v8y2019p566-580.html>
- Chávez Alcalá, M., Luna Sánchez, E. y Vargas Díaz, A. (2024). Desarrollo de una aplicación móvil para agrupaciones comunitarias de ahorro y préstamo. *Transdigital*, 5(10), <https://doi.org/10.56162/transdigital260>.

- Consejo Nacional de Evaluación de la Política de Desarrollo Social (2022). *Medición de la pobreza 2022*. https://www.coneval.org.mx/Medicion/MP/Paginas/Pobreza_2022.aspx
- De Carvalho, T. y Roelen, K. (2025). *Social protection for economic inclusion in Latin America: the potential of comprehensive programming*. CSGD Research and Evidence Paper #1. Centre for the Study of Global Development, The Open University. Fundación Capital. <https://wels.open.ac.uk/sites/wels.open.ac.uk/files/files/CSGD%20R%26E%20Paper%20%231%20De%20Carvalho%20%26%20Roelen%20%5B11-apr-25%5D.pdf>
- Duvendack, M. y Mader, P. (2020). Impact of financial inclusion in low- and middle-income countries: a systematic review of reviews. *Journal of Economic Surveys*, 34(3), 594-629. <https://doi.org/10.1111/joes.12367>
- Ebrahim, A. (2003). Making sense of accountability: conceptual perspectives for northern and southern nonprofits. *Nonprofit Management and Leadership*, 14(2), 191-212.
- Ekboir, J. (2003). Why impact analysis should not be used for research evaluation and what the alternatives are. *Agricultural systems*, 78(2), 166-184.
- Engineers Without Borders. (2017). *2017 Failure report*. https://www.ewb.ca/wp-content/uploads/2018/08/EWB_FAILURE-REPORT_EN_03-08-2018-pages.pdf
- Eyben, R. (2014). *International aid and the making of a better world: reflexive practice*. Routledge.
- Fundación Paraguaya. (2014). *Manual del Semáforo de Eliminación de la Pobreza*. Fundación Paraguaya. Asunción.
- Funnel, S. y Rogers, P. (2011). *Purposeful program theory: effective use of theories of change and logic models*. Jossey Bass.
- Galaz-Fontes, J.F. y Gil-Antón, M. (2013). The impact of merit-pay systems on the work and attitudes of Mexican academics. *Higher Education*, 66(3), 357-374.
- Hall, A., Sulaiman, V., Clark, N. y Yoganand, B. (2003). From measuring impact to learning institutional lessons: an innovation systems perspective on improving the management of international agricultural research. *Agricultural systems*, 78(2), 213-241.
- Herrera-García, A.F. (2019). Inclusión financiera femenina en México: una herramienta para su empoderamiento. *Femeris: Revista Multidisciplinar de Estudios de Género*, 4(3), 158-182. <https://doi.org/10.20318/femeris.2019.4934>
- Hicks, D., Wouters, P., Waltman, L., de Rijcke, S. y Rafols, I. (2015). The Leiden Manifesto for research metrics. *Nature*, 520(7548), 429-431.
- LSE Public Policy Group. (2011). *Maximizing the impacts of your research: a handbook for social scientists*. London School of

- Economics and Political Science. <https://blogs.lse.ac.uk/impactofsocialsciences/2011/04/14/maximizing-the-impacts-of-your-research-a-handbook-for-social-scientists-now-available-to-download-as-a-pdf/>
- Lybbert, T.J. y Wydick, B. (2018). Poverty, aspirations, and the economics of hope. *Economic Development and Cultural Change*, 66(4), 739-778.
- Martín, X. (2014). ¿Qué son los grupos de ahorro? *Evolución de los mecanismos grupales de ahorro y crédito*. Fondo Multilateral de Inversiones. Banco Interamericano de Desarrollo. <https://www.findevgateway.org/es/publicacion/2014/07/que-son-los-grupos-de-ahorro-evolucion-de-los-mecanismos-grupales-de-ahorro-y>
- Mora-Rivera, J. y García-Mora, F. (2018). Microfinanzas y pobreza rural en México: un análisis con técnicas de propensity score matching. *Cuadernos de Desarrollo Rural*, 15(82), 38-56. <https://doi.org/10.11144/javeriana.cdr15-82.mprm>.
- Mullainathan, S. y Shafir, E. (2013). *Scarcity: why having too little means so much*. Times Books.
- Nature (2020). Ending hunger: science must stop neglecting small-holder farmers. *Nature*, 586(7829), 336-336. <https://doi.org/10.1038/d41586-020-02849-6>
- Oslo Institute for Research on the Impact of Science (2016). *Introduction to the new centre OSIRIS – The Oslo Institute for Research on the Impact of Science*. <https://www.sv.uio.no/tik/english/research/centre/osiris/presentations/presentations-2017/osiris-presentation-general-english.pdf>
- Reed, M. (2021). *The research impact handbook*. Fast Track Impact.
- Rodríguez-Ferrera, J.C. (2006). *Metodologías microfinancieras grupales. Una aplicación de Latinoamérica a Catalunya* [Tesis de doctorado]. Universitat Ramon Llull. https://discovery.url.edu/permalink/34CSUC_URL/lim36ta/alma991007268269706719
- Roelen, K. (2025). *The empathy fix: why poverty persists and how to change it*. Allen & Unwin.
- Scriven, M. (2005). Review of the book: Empowerment Evaluation Principles in Practice. *American Journal of Evaluation*, 26(3), 415-417.
- Sivertsen, G. y Meijer, I. (2020). Normal versus extraordinary societal impact: how to understand, evaluate, and improve research activities in their relations to society? *Research Evaluation*, 29(1), 66-70. <https://doi.org/10.1093/reseval/rvz032>.
- Spaapen, J. y Van Drooge, L. (2011). Introducing ‘productive interactions’ in social impact assessment. *Research Evaluation*, 20(3), 211-218. <https://doi.org/10.3152/095820211X12941371876742>
- Suárez-Zozaya, M. y Muñoz-García, H. (2004). Ruptura de la institucionalidad universitaria. En I. Ordorika (Coord.), *La academia en*

jaque: perspectivas políticas sobre la evaluación de la educación superior en México (pp. 25-33). Universidad Nacional Autónoma de México, Miguel Ángel Porrúa.

Termeer, C. y Dewulf, A. (2019). A small wins framework to overcome the evaluation paradox of governing wicked problems. *Policy and Society*, 38(2), 298-314. <https://doi.org/10.1080/14494035.2018.1497933>

Torcat Rivas, M., Rodríguez-Ferrera, J.-C. y Raydán Rivas, S. (2011). *La otra microfinanza*. Fundefir.

Vasen, F. y Lujano Vilchis, I. (2017). Sistemas nacionales de clasificación de revistas científicas en América Latina: tendencias recientes e implicaciones para la evaluación académica en ciencias sociales. *Revista Mexicana de Ciencias Políticas y Sociales*, 62(231), 199-228. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0185-19182017000300199

Van der Meulen, B., Van Drooge L., Van den Besselaar P., Elsen M., De Haas M., Van den Heuvel J. y Maassen H. (2010). *Evaluating the societal relevance of academic research: a guide*. <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid:8fa07276-cf52-41f3-aa70-a71678234424>.

Weiβhuhn, P., Helming, K. y Ferretti, J. (2018). Research impact assessment in agricultura – A review of approaches and impact areas. *Research Evaluation*, 27(1), 36-42.

Emprendimiento social para la recuperación de saberes ancestrales: la grana cochinilla en Teotitlán del Valle

Social entrepreneurship for the recovery of ancestral knowledge: the grana cochinilla in Teotitlán del Valle

Irlanda Abigail Matadamas Cruz* 

Virginia Guadalupe Reyes de la Cruz 

Universidad Autónoma Benito Juárez de Oaxaca, Oaxaca, México

*irlanda.mc86@gmail.com

DOI: 10.61820/dcqua.2395-8847.2047

Fecha de recepción: 18 de septiembre del 2025

Fecha de aceptación: 23 de octubre del 2025

Resumen

Los saberes ancestrales forman parte del patrimonio biocultural de una población, por lo que es importante su protección y salvaguarda. En ese sentido, el emprendimiento social figura como una estrategia para la promoción y rescate de técnicas milenarias. En el pueblo zapoteca de Teotitlán del Valle, Oaxaca, México, los artesanos se dedican a la elaboración de textiles de hilo de lana, en cuyo proceso de teñido utilizan un tinte natural de origen prehispánico: la grana cochinilla. Si bien esta técnica ha perdido popularidad en la actualidad, resulta pertinente fomentar su continuidad debido a que contribuye al manejo sostenible de la producción textil en el pueblo. Ante esto, se llevó a cabo un estudio de corte cualitativo-descriptivo que consistió en realizar visitas a la localidad para observar elementos del cotidiano y desarrollar un grupo focal. Como resultado, se creó un modelo de emprendimiento social que recupera la acción transformadora de actores sociales con el fin de rescatar y promover sus saberes ancestrales. Adicionalmente, impulsa el desarrollo comunitario al permitir que los habitantes transformen su propiedad social a través de la preservación de estos saberes.

Palabras clave: emprendimiento social, patrimonio biocultural, rescate, técnicas milenarias



Abstract

Ancestral knowledge forms part of the biocultural heritage of a population, therefore, it is essential for protection and safeguarding. In this sense, social entrepreneurship emerges as a strategy for promotion and revitalization of ancient techniques. In the Zapotec village of Teotitlán del Valle, Oaxaca, Mexico, artisans make a living from producing wool textiles, which are dyed with grana cochinilla, a prehispanic natural pigment. Even though this technique has become less popular, its promotion is still relevant for its contribution to the sustainable management of textile production in the community. This qualitative-descriptive study aimed to observe everyday life in this place through a series of visits and the development of a focus group. As a result, a social entrepreneurship model was created that recovers the transformative action of social actors in order to rescue and promote their ancestral knowledge. Additionally, this model fosters community development, enabling the inhabitants to transform their social assets by preserving this knowledge.

Keywords: ancient techniques, biocultural heritage, rescue, social entrepreneurship

Introducción

En las últimas décadas, el emprendimiento social ha sido relevante en el desarrollo de proyectos productivos con impacto social, puesto que atiende las necesidades de grupos específicos. Para la Organización Internacional del Trabajo (OIT, 2008), la promoción del trabajo decente entre los pueblos indígenas consiste en propiciar formas económicas que favorezcan la productividad y la competitividad en actividades conciliadas con alta calidad de empleo, desarrollo social y sostenibilidad ecológica.

De la misma manera, la OIT afirma que dicha promoción se debe realizar respetando la diversidad de los pueblos y sus cosmovisiones. Bajo esta premisa, se puede constatar que se reconoce a los pueblos originarios como los únicos actores que salvaguardan los territorios y contribuyen a la disminución de los efectos del cambio climático.

Por su parte, el estado de Oaxaca se distingue por un amplio abanico de comunidades reconocidas por elementos culturales como su arte, lengua materna, gastronomía, mercados tradicionales, danzas, zonas arqueológicas y saberes que constituyen el patrimonio de cada pueblo. Al mismo tiempo, también se caracteriza por una fuerte migración, como sucede en la población de Teotitlán del Valle.

Esta localidad se posiciona a nivel nacional e internacional en la producción de tapetes hechos con fibras (lana) y tintes naturales, en gran medida, debido a la construcción de la carretera Panamericana en 1948. Además, el auge del turismo internacional a partir de la década de los cincuenta y los programas implementados por el gobierno federal favorecieron la promoción de las artesanías indígenas (Stephen, 2005).

En cuanto al fenómeno migratorio, Teotitlán del Valle forma parte de los movimientos de personas zapotecas que desde el distrito de Tlacolula comenzaron, a mediados de los años cincuenta, a trasladarse al área de Los Ángeles (Ruiz Balzola, 2014). Este desplazamiento ha contribuido a los emprendimientos de la comunidad y ha fortalecido la infraestructura de los talleres de artesanos y artesanas, puesto que los migrantes colaboran con obras para la localidad.

A partir de este contexto, se identificó que en Teotitlán del Valle algunos artesanos y artesanas todavía poseen un saber ancestral que aplican en el proceso de elaboración de tapetes de lana: la técnica natural de teñido con grana cochinilla. Así, esta investigación se desarrolló mediante un diseño metodológico de tipo cualitativo-descriptivo, con la intención de abordar los principales resultados del emprendimiento social como una estrategia para el rescate y promoción de saberes. El trabajo permitió destacar la importancia de un emprendimiento con impacto social para artesanos y artesanas de esta población.

Marco teórico

El término patrimonio biocultural ha sido tendencia en las últimas décadas. De acuerdo con Toledo *et al.* (2019), es la suma de diferentes definiciones de patrimonio y otros significados relacionados, como diversidad biológica, genética, lingüística, cognitiva, agrícola y paisajística. En otras palabras, es la variedad de enfoques de vida y las diferentes cosmovisiones que conviven en el mundo, en este caso concreto, en México.

En antropología, cuando nos referimos a cultura, consideramos la pluralidad de formas mediante las cuales el ser humano responde a los retos de la cotidianidad, así como las interpretaciones que fundamenta y legitima de acuerdo con su visión del mundo o cosmovisión. Esto nos permite hilvanar los conocimientos y la distribución de los diferentes campos del saber, que aún distan mucho de ser comprendidos en su totalidad (Peña Sánchez y Hernández Albarrán, 2013).

De todas las expresiones queemanan de una cultura, los conocimientos sobre la naturaleza conforman una dimensión

especialmente relevante, pues reflejan la acuciosidad y riqueza de observaciones sobre el entorno realizadas, mantenidas, trasmítidas y perfeccionadas a través de largos periodos, sin las cuales la supervivencia de los grupos humanos no hubiera sido posible. Esta sabiduría –también conocida como saberes– se trasmite de generación en generación y es descrita como imprescindible (Toledo y Barrera Bassols, 2008). En la actualidad, son los hombres y las mujeres que conforman nuestros pueblos indígenas quienes poseen estos conocimientos, los cuales forman parte de un patrimonio comunitario que, en ocasiones, se ve amenazado con desaparecer.

Ante esta situación, puede surgir una nueva perspectiva compleja de la identidad de identidades, en la que se coopera en la construcción de un proyecto en conjunto con otras identidades para gestionar un patrimonio común en pro de su preservación (Alguacil Gómez, 2004). Para tal fin, los actores sociales que manejen dicho patrimonio deben ser únicamente los propios miembros de su comunidad.

Los saberes ancestrales están enfocados en la medicina, gastronomía, silvicultura, construcción, artesanías, lenguas originarias, técnicas de conservación, microclimas, producción y alimentación, agricultura y riego, entre otros (Carranza Patiño et al., 2021). Estas prácticas nos hacen reflexionar sobre la importancia de revalorizarlos como “un modo de conciencia basado en el lugar, una manera-lugar específica de otorgarle sentido al mundo” (Escobar, 2005, p. 75).

Se busca la utilidad práctica de ese legado generacional, visto como formación de vida que permite el desarrollo de valores sociales como el compartir, la cooperación y la solidaridad con los habitantes del pueblo. Asimismo, la conservación ambiental se logra bajo la ancestralidad, que va desde el saber agroecológico hasta el uso de tintes naturales en la elaboración de sus artesanías (Suárez Luque y Rodríguez, 2018).

Lo que se aborda aquí es el involucramiento territorial y cultural en el reconocimiento de la sabiduría que puede reconfigurar prácticas no visibles. En primera instancia, esto genera agencia por parte de los actores locales y hace cada vez más efectivo el proceso de descentralización; además, propicia un mayor aprendizaje significativo con saberes propios de la región, provechosos para su desarrollo (Salazar Jasso y Cogco, 2022).

Según los reportes ofrecidos por el Fondo Nacional para el Fomento de las Artesanías (FONART, 2020), las poblaciones artesanas oscilan desde 1,179 personas en Yucatán; 24,888 en Chiapas; 46,072 en Estado de México; hasta 451,837 en

Oaxaca, siendo este último el estado con mayor número de este padrón. Este elemento identitario se construyó a partir de emprendimientos de auténticas piezas de arte, la presencia del turismo internacional y el fenómeno migratorio que se manifiesta en comunidades rurales.

Muchos microempresarios indígenas trabajan activamente para que sus culturas no se pierdan; han visto en sus negocios una forma de mantener sus tradiciones, más allá de una manera de ganarse la vida (González del Pino, 2021). Cabe destacar que la comunidad es generadora de sus propios recursos, fortalezas y potencialidades (Ospina Ramírez, 2018). En consecuencia, el emprendimiento asociativo se posiciona como uno de los pilares más destacados y con mayor repercusión en la actividad comercial del sector primario, secundario y terciario (estos dos últimos en menor cuantía). En el nivel secundario se encuentran los negocios indígenas (manufactura artesanal), forjando valor agregado y sustentabilidad a la economía de sus demografías locales y regionales (Rivas, 2018).

De acuerdo con datos del Censo Económico 2019, los sectores que concentraron más unidades económicas en la comunidad Teotitlán del Valle fueron: Industrias Manufactureras (740), Comercio al por Menor (270) y Servicios de Alojamiento Temporal y de Preparación de Alimentos y Bebidas (41) (Data México, 2020). Los talleres dedicados a la elaboración de tapetes se encuentran en el rubro de Industrias Manufactureras, mientras que la categoría de Preparación de Alimentos y Bebidas incluye restaurantes que ofrecen comida ancestral. En esta última, destaca el restaurante Tlamanalli, liderado por la mayora Abigail Mendoza, quien ha logrado posicionarla a nivel nacional e internacional como representante sobresaliente de la gastronomía.

Es relevante considerar el regreso de los migrantes a la comunidad para participar en las fiestas y proyectos iniciados e impulsados desde el norte. Las negociaciones en torno a las cooperaciones y las remesas están sujetas a la lógica de la comunidad, quienes principalmente las destinan para obras que se consideren necesarias o para fiestas patronales (Ruiz Balzola, 2014). Es así como este fenómeno fortalece los emprendimientos de artesanas y artesanos, ya que el dinero proveniente del extranjero se invierte en actividades relacionadas con la producción artesanal.

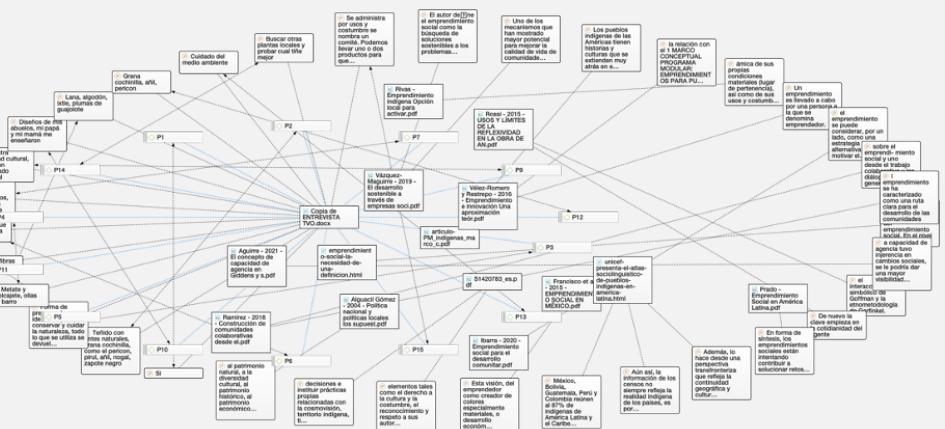
Metodología

El presente trabajo es un estudio de corte cualitativo-descriptivo realizado a partir de visitas de observación participante en Teotitlán del Valle, Oaxaca, donde se recopilaron elementos del cotidiano. Además, se desarrolló un grupo focal conformado por tres artesanas, un artesano y la regidora de Educación y Cultura. Los participantes fueron seleccionados a través de recomendaciones de los miembros de la población y se consideró como único criterio que se tratara de personas que actualmente utilizan la técnica de grana cochinilla para el teñido de sus textiles de lana.

Posteriormente, se elaboró una red con el programa Atlas.ti (Figura 1), creada con citas (teóricas o empíricas) y códigos basados en las respuestas de las y los participantes del grupo focal. Para ello, se utilizó una guía de preguntas abiertas que fue de apoyo durante la discusión. Las redes representan posibles entramados entre los códigos y las citas que enmarcan dichas repuestas, de acuerdo con el cuerpo teórico, como se muestra a continuación:

Figura 1.

Modelo de red



Fuente: elaboración propia con información obtenida de Atlas.ti, mayo del 2023

Uno de los aspectos más relevantes que las y los artesanos expusieron durante el grupo focal fue la importancia del rescate y promoción de los saberes ancestrales. Señalaron que bajo una dinámica generacional, y hablando aún zapoteco como lengua materna, han logrado transmitir los saberes de los abuelos y padres a su descendencia. Manifiestan que es parte de su identidad plasmar algunos símbolos prehispánicos y replicar los diseños propios de sus abuelos en cada tapete que elaboran.

En relación con lo anterior, indicaron que comparten sus saberes desde una vinculación con el mundo natural que les rodea. Expresan sus formas de cuidado hacia la naturaleza (agua y plantas que utilizan en sus procesos), lo social (formas de organizarse al interior del taller y de la población) y lo espiritual (su visión del mundo y de prácticas del cotidiano), elementos que para ellos simboliza un equilibrio.

Enfatizaron que, si obtienen de la naturaleza bienes (propiedad social) y los transforman mediante saberes ancestrales para su beneficio común, deberían devolver del mismo modo algo a la tierra. Esta concepción es una manera de cambiar la visión eurocentrista, como bien lo señalan autores como Toledo *et al.* (2019), Alguacil Gómez (2004), Ospina Ramírez (2018), González del Pino (2021) y Rivas (2018). Las y los artesanos colocan, muy a su forma, la vida comunitaria al centro, aspecto presente en el análisis de la red, donde se encontró relación entre las citas de esos estudiosos y los códigos que resultaron de las respuestas del grupo focal.

Por consiguiente, su actuar en el cotidiano se visualiza como su capacidad de agencia: articulan saberes ancestrales de un pueblo originario con acción transformadora propia de los actores sociales de Teotitlán del Valle. Generan una dinámica para el desarrollo de su localidad, orientada al bien común, que impacta en las actividades productivas y sociales derivadas de sus prácticas comunitarias.

En las redes conceptuales y estructurales que resultaron del programa Atlas.ti se hacen explicativas las interpretaciones, pues permiten nombrar los elementos que pueden apoyar, complementar, argumentar o concluir el modelo de emprendimiento social para el rescate de los saberes ancestrales. Entre estos elementos se incluye el patrimonio común y compartencia de los artesanos y artesanas, los bienes naturales de la comunidad (propiedad social), la sabiduría ancestral transmitida de generación en generación y la pertenencia a un pueblo originario zapoteco. Al mismo tiempo, se cumple con la finalidad del rescate y promoción de los saberes, técnicas y usos asociados con acciones transformadoras de los actores sociales, lo que genera impacto social en el desarrollo comunitario. Así, se diseñó un modelo de emprendimiento social para artesanos y artesanas cuyo objetivo es el rescate de la técnica ancestral de la grana cochinilla.

Resultados y discusión

El posicionamiento que tienen los tapetes de lana en el mercado nacional e internacional (Estados Unidos, Canadá, Europa, Corea del Sur, entre otros países), los cambios vertiginosos de los precios en el mercado de los tintes naturales y el cambio brusco de las condiciones climatológicas para la producción de la grana cochinilla influyen en que los artesanos tomen decisiones sobre el cómo hacer más eficiente su producción. Sin embargo, ello implica sacrificar la etapa de teñido, dejando en desuso el tinte ancestral conocido como grana cochinilla.

De ahí surgió la propuesta de un modelo de emprendimiento social para los artesanos y artesanas que funcione como una forma de rescate y promoción de esta técnica ancestral de teñido durante la elaboración de textiles (tapetes). Enfrentar el desuso o pérdida total de este tipo de conocimiento requiere valorizar los saberes ancestrales en la producción de diseños originales y sostenibles.

Es importante destacar que dicho tinte se remonta a la época de la conquista de la Nueva España: en ese entonces se producían pigmentos naturales para la industria textil. El tinte principal era la cochinilla, el palo y el añil, posicionándose así como la segunda materia prima de exportación de la Nueva España, después del oro y la plata. Posteriormente, las poblaciones que lo producían incursionaron en utilizarlo para teñir las artesanías que comenzaron a diseñar.

Gracias a las nuevas tendencias para un desarrollo sostenible en los mercados y al crecimiento específico de sus consumidores que buscan productos de origen natural –en pro del cuidado del medio ambiente– relacionados con la higiene y la salud, entre otras cosas, se ha generado el contexto ideal para recuperar las prácticas sustentables que en algunos casos se han dejado de aplicar.

La utilización de la grana cochinilla como alternativa de gran impacto medioambiental y económico, sumada al factor cultural de quienes cultivan nopal para la crianza de este insecto y actúan como los guardianes de la producción y empleo de ese tinte tan preciado, forma parte de su patrimonio identitario y memoria histórica. Así, para la recuperación de esta valiosa técnica, diseñamos una propuesta de modelo de emprendimiento social (Figura 2).

Esta propuesta apunta no solo a la generación de micronegocios sostenibles al interior de una localidad, sino que también puede resultar en la creación de proyectos que empoderen a una población y fortalezcan ese patrimonio identitario que ya poseen. Con ello, se promueve un desarrollo comunitario sustentable y se transmite un legado único a futuras generaciones.

Figura 2.

Emprendimiento social para la recuperación de saberes ancestrales



Fuente: elaboración propia con información obtenida de la investigación de campo, abril del 2023

El emprendimiento social consiste en la recuperación de un elemento importante del patrimonio común como pueblo originario. En este caso, se trata de la actividad productiva generacional de tapetes de lana teñidos con tintes naturales. Cabe señalar que este patrimonio no solo es heredado para reproducirse de generación en generación, sino que también funciona como un escalón para establecer una dinámica social, cultural y espiritual.

Esa actividad productiva se realiza con un manejo sustentable, ya que es el resultado de la transformación de la propiedad social (plantas que crecen en su entorno) que la naturaleza brinda a la comunidad. En este proceso, los y las artesanas se enmarcan en la configuración y el mapeo de los recursos que hay en su territorio, para posteriormente crear el tejido y llevarlo hacia otras localidades vecinas.

Nos referimos a propiedad social, no a insumos ni materias primas, porque se trata de elementos vinculados a la tierra que deben respetarse. Una nopalera crece cerca de los talleres donde se elaboran los tapetes; después se infesta y nace la plaga grana cochinilla que, al alcanzar la madurez adecuada, es recolectada y secada. Posteriormente, se Tritura en herramientas también ancestrales, como el metate o chirmolera, elaboradas de piedra por otra población vecina (Figura 3). Previamente, los artesanos y artesanas preparan la lana sobre la cual comenzarán el proceso de teñido, mientras reflexionan sobre el diseño que llevará su tapete, como figuras geométricas o grecas de la zona arqueológica.

Figura 3.

Recolección de la grana cochinilla



Fuente: elaboración propia con información obtenida

de la investigación de campo, abril del 2023

Este saber ancestral fue transmitido de generación en generación, desarrollándose así una dinámica transgeneracional. Como resultado de esos procesos de aprendizaje, surgieron talleres artesanales con una estructura productiva propia y un fuerte arraigo cultural de quienes aún conservan esta técnica.

Es importante recuperar esos saberes ancestrales mediante una acción transformadora de quienes poseen los conocimientos, propiedad social, y el aporte y suma de sus capacidades entre los diferentes miembros de la población para asegurar la obtención de este tinte natural-ancestral. Los mismos artesanos y artesanas son los actores sociales, protagonistas del rescate de saberes milenarios, tanto de la técnica como de las herramientas utilizadas durante el proceso. Además, reactivan y revalorizan las actividades productivas de las localidades de donde obtienen sus herramientas.

El impacto social se manifiesta en el valor social generado a partir de la transformación de la propiedad social disponible, cambio que es posible gracias al esfuerzo y experiencia que se posee al interior de la población. Esto permite continuar con la transmisión de conocimientos a los más jóvenes y enriquecer su cultura mediante obras de arte valuadas tanto por el arduo esfuerzo que implica su elaboración como por su carácter amigable con el medio ambiente y por la proyección de elementos culturales, simbólicos y de la cosmovisión local. Las capacidades creativas se transfieren de padres a hijos, incorporándolas con elementos de origen zapoteca y su visión del mundo. De este

modo, además de reproducir el conocimiento técnico ancestral, se replican códices prehispánicos, figuras geométricas complejas, representaciones florales o de pájaros, así como creaciones propias con diseños imaginativos.

Figura 4.

Exposición de tapetes en el Centro Cultural Comunitario



Fuente: elaboración propia con información obtenida de la investigación de campo, abril del 2023

Ese desarrollo comunitario, además de representar un crecimiento económico, es un impulso para rescatar y promover lo que por derecho les pertenece. Con emprendimientos sociales se refleja el capital social y el fomento de la participación social de las personas que se dedican a una actividad productiva. Para eso, es necesario que tengan por objetivo el beneficio común y no únicamente aspectos económicos.

El rescate y la promoción son el detonante para impulsar procesos de aprendizaje de la cultura que alberga Teotitlán del Valle, con el fin de mantener vigencia de los conocimientos y saberes ancestrales, así como del entorno y las actividades productivas.

Conclusiones

Del territorio en el cual habitamos y coexistimos con la naturaleza surge un vínculo que en algunas comunidades sigue resistiendo. Ante la necesidad de otorgar un valor agregado a los bienes materiales e inmateriales provenientes de la biodiversidad de los pueblos originarios, así como generar un impacto social en las actividades desarrolladas en el seno de

estas comunidades, se plantea un enfoque diferenciador en este modelo de emprendimiento.

Este emprendimiento se basa en el uso respetuoso, eficiente y sustentable de la biodiversidad. Desde esta perspectiva, los habitantes reconstruyen su contexto y recuperan tanto el don como la inspiración que el territorio les ofrece. Materializar el uso de la técnica de grana cochinilla implica recuperar un saber ancestral que, además, es sustentable y amigable con el medio ambiente. De ahí la importancia de promover su rescate.

En este contexto, los insumos que ofrece la naturaleza no se conciben simplemente como materia prima, sino más bien como elementos naturales valiosos que se deben respetar y cuidar. Esta propiedad social, que se utiliza para crear piezas de arte que forman parte de la comunidad, permite valorizar el trabajo de los y las artesanas que elaboran tapetes, junto con los aspectos sociales, ambientales y espirituales que rodean su producción. Esto incluye cosmovisiones, significados y símbolos, lo que evidencia la riqueza cultural y conexión profunda entre la localidad y su entorno natural.

Teotitlán del Valle constituye un ejemplo para otras poblaciones con características bioculturales similares. Es una fuente de motivación para saber enfrentar esquemas de desigualdad y para valorar las piezas artísticas que resultan de la transformación de elementos naturales, espirituales, simbólicos y de inspiración en obras únicas y originales. De lo anterior, surgen quehaceres que permitirán trabajar bajo esquemas de capital social para beneficio común y, de esta forma, evitar el saqueo de conocimientos y saberes, la desvalorización del trabajo, así como el clientelismo y asistencialismo de políticas públicas que, en lugar de beneficiar, permean la cultura de los pueblos.

Por último, cabe señalar la función de los actores sociales –habitantes globales, migrantes, artesanos y artesanas, cocineras tradicionales, entre otros– quienes contribuyen a transformar su contexto. Estos ciudadanos del mundo desempeñan un papel crucial en la dinámica social, puesto que aportan habilidades, conocimientos y enriquecimiento cultural. La migración, el turismo y la exportación de tapetes, consecuencias de la globalización, propician que la comunidad se involucre en un mercado capitalista. Sin embargo, es posible contrarrestar los efectos negativos con una iniciativa de emprendimiento social sustentable que genere beneficios colectivos.

Referencias

- Alguacil Gómez, J. (2004). Política nacional y políticas locales: los supuestos de la solidaridad. *Polis. Revista Latinoamericana*, 7. <https://journals.openedition.org/polis/6255>
- Carranza Patiño, H.M., Tubay Moreira, M.F., Espinoza Briones, H.B. y Chang Muñoz, W.L. (2021). Saberes ancestrales: una revisión para fomentar el rescate y revalorización en las comunidades indígenas del Ecuador. *Journal of Science and Research*, 6(3), 112-128. <https://doi.org/10.5281/zenodo.5659722>
- Data México. (2020). *Teotitlán del Valle. Municipio de Oaxaca*. Gobierno de México. Recuperado el 24 de mayo del 2023 en <https://www.economia.gob.mx/datamexico/es/profile/geo/teotitlan-del-valle>
- Escobar, A. (2005). El lugar de la naturaleza y la naturaleza del lugar: ¿globalización o posdesarrollo? En E. Lander (Comp.), *La colonialidad del saber: eurocentrismo y ciencias sociales*. Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales.
- Fondo Nacional para el Fomento de las Artesanías. (2020). *Diagnóstico situacional del sector artesanal en México durante el período de la pandemia por el COVID19*. Gobierno de México. Recuperado el 18 de octubre del 2022 en <https://www.gob.mx/fonart/documentos/diagnostico-situacional-del-sector-artesanal-en-mexico-durante-el-periodo-de-la-pandemia-por-el-covid19>
- González del Pino, C. (2 de septiembre del 2021). *Emprendedora indígena empieza una nueva vida lejos de la violencia*. Fundación Microfinanzas BBVA. <https://www.fundacionmicrofinanzasbbva.org/34388/>
- Organización Internacional del Trabajo. (2008). *Programa modular: emprendimientos para pueblos indígenas*. Centro Internacional de Formación de la OIT. <https://www.oitcinterfor.org/node/6245>
- Ospina Ramírez, D.A. (2018). Construcción de comunidades colaborativas desde el diseño y el emprendimiento endógeno. *Revista EAN*, (84), 63-77. <https://doi.org/10.21158/01208160.n84.2018.1917>
- Peña Sánchez, E.Y. y Hernández Albarrán, L. (2013). *Entre saberes ancestrales y conocimientos contemporáneos*. Instituto Nacional de Antropología e Historia. Recuperado el 16 de octubre de 2025 en <https://difusion.inah.gob.mx/publicaciones/libros/2299.html>
- Rivas, R.D. (2018). La artesanía: patrimonio e identidad cultural. *Revista de Museología “Kóot”*, (9), 80-96. <https://doi.org/10.5377/koot.v0i9.5908>
- Ruiz Balzola, A. (2014). Construyendo Teotitlán: migrants, gringos and ethnographers. *AIBR, Revista de Antropología Iberoamericana*, 9(1), 53-74. <https://doi.org/10.11156/aibr.090104>
- Salazar Jasso, A. y Cogco C., A. (2022). Saberes rurales en el sistema educativo mexicano: significados comunitarios en el noreste del país. *Revista de Ciencias Sociales*, (172), 109-124. <https://doi.org/10.15517/rcs.v0i172.49938>

Suárez Luque, J.C. y Rodríguez, M. del C. (2018). Saberes ancestrales indígenas: una cosmovisión transdisciplinaria para el desarrollo sustentable. *Novum Scientiarum*, 3(7), 71-82.

Stephen, L. (2005). *Mujeres Zapotecas*. Duke University Press. <https://doi.org/10.1215/9780822387510>

Toledo, V.M. y Barrera Bassols, N. (2008). *La memoria biocultural. La importancia ecológica de las sabidurías tradicionales*. Junta de Andalucía/Icaria Editorial.

Toledo, V.M., Barrera-Bassols, N. y Boege, E. (2019). *¿Qué es la diversidad biocultural?* Universidad Nacional Autónoma de México. https://patrimoniobiocultural.com/archivos/publicaciones/libros/Que_es_la_diversidad_biocultural.pdf

¿Plaguicidas en Áreas Naturales Protegidas? Evidencia de su uso en la Reserva de la Biosfera Sierra Gorda de Querétaro

**Pesticides in Protected Natural Areas?
Evidence of their use in the Sierra Gorda
Biosphere Reserve, Queretaro**

Alexis Vélez-Hernández 

Eduardo Luna-Sánchez* 

Mayra Juliana Chávez-Alcalá 

Miguel Ángel Bartorila 

Universidad Autónoma de Querétaro

*eduardo.lusan@uaq.mx

DOI: [10.61820/dcuqa.2395-8847.1962](https://doi.org/10.61820/dcuqa.2395-8847.1962)

Fecha de recepción: 4 de junio del 2025

Fecha de aceptación: 18 de noviembre del 2025

Resumen

Diversos estudios internacionales han documentado los impactos ambientales causados por los plaguicidas en reservas de biosfera; sin embargo, se ha explorado muy poco sobre la forma en que los agricultores que las habitan utilizan dichos productos. Con la finalidad de entender este fenómeno en la Reserva de la Biosfera Sierra Gorda de Querétaro, el presente trabajo se planteó el objetivo de conocer el empleo de plaguicidas en el valle agrícola de Concá, la zona de mayor producción de hortalizas de riego en la reserva. Se realizó un estudio transversal descriptivo basado en entrevistas semiestructuradas y la observación de prácticas de uso y disposición de plaguicidas. Como resultados, se identificaron más de 80 plaguicidas comerciales, muchos clasificados como altamente peligrosos, y las prácticas de manejo revelan una exposición elevada a riesgos para la salud y el medio ambiente, así como un bajo uso de equipo de protección personal y disposiciones de residuos inadecuadas. Esta investigación llena un vacío empírico sobre el tipo de sustancias empleadas y la forma en que se utilizan en un Área Natural Protegida (ANP) mexicana, contribución científica que brinda evidencia aplicable para el diseño de intervenciones técnicas. En concreto, se propone



una capacitación focalizada y culturalmente pertinente para productores y jornaleros, acompañada de una restricción escalonada de pesticidas altamente peligrosos.

Palabras clave: percepción, plaguicidas, reservas de biosfera, Sierra Gorda

Abstract

Numerous international studies have documented the environmental impacts of pesticides in biosphere reserves; however, very little research has examined how farmers living within these reserves actually use such products. To address this gap in the Sierra Gorda Biosphere Reserve (Queretaro, Mexico), this study aimed to characterize pesticide use in Conca's agricultural valley, the reserve's main irrigated vegetable-growing area. A descriptive cross-sectional study was conducted based on semi-structured interviews, as well as the observation of pesticide use and disposal practices. More than 80 commercial pesticides were identified, many classified as highly hazardous. Additionally, management practices indicate elevated risks to human health and the environment, alongside low use of personal protective equipment and inadequate waste disposal. This research fills an empirical gap on the substances used within a Mexican Protected Natural Area (PNA) and their handling, providing actionable evidence for the design of technical interventions. Specifically, it proposes targeted, culturally appropriate training for farmers and farmworkers, accompanied by a phased restriction of highly hazardous pesticides.

Keywords: biosphere reserves, perception, pesticides, Sierra Gorda

Introducción

Las reservas de biosfera son un modelo de conservación que propone la coexistencia armónica entre pobladores locales y el patrimonio natural (Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO], s.f.). Sin embargo, el uso de plaguicidas en reservas es un problema difícil de resolver, especialmente cuando la declaratoria se realiza en regiones agrícolas sin la participación de los pobladores locales (Brockington y Wilkie, 2015).

El impacto negativo de los plaguicidas sobre el medio ambiente ha sido ampliamente documentado. Por un lado, afectan de forma inmediata organismos no objetivo, como polinizadores, aves que ingieren insectos y vertebrados que consumen plantas rociadas con estos productos (Barranco León

et al., 2015; Perilla Melo, 2020). Por el otro, sustancias como los organofosforados y carbamatos pueden bioacumularse y provocar daños a la fauna silvestre expuesta de forma crónica, como defectos mutagénicos, muerte prematura o no alcanzar la madurez sexual (Albert y Benítez, 2005; Alcántara, 2008; Monsalve Buriticá, 2019).

A nivel internacional, se han realizado investigaciones para identificar la contaminación residual de plaguicidas en reservas de biosfera adyacentes a zonas agrícolas (Brühl *et al.*, 2021; Paré *et al.*, 2014; Schneeweiss *et al.*, 2022). Por su parte, en México, al estudiarse la calidad del agua subterránea en Áreas Naturales Protegidas (ANP), se identificó la presencia de elementos carcinógenos asociados a la aplicación de pesticidas organoclorados, los cuales superan los valores recomendados por la normatividad mexicana (Polanco-Rodríguez *et al.*, 2020).

En este sentido, si bien se cuenta con diversas leyes mexicanas para reducir los efectos dañinos de los plaguicidas, existe una importante brecha de implementación en zonas rurales debido al desconocimiento de los productores y a la incapacidad de las autoridades para regular su uso (Sánchez-Gervacio *et al.*, 2021). Un caso emblemático de los desafíos institucionales para modificar el uso de plaguicidas corresponde a la sustitución del glifosato. La Comisión Nacional de Áreas Naturales Protegidas (CONANP) se sumó en 2021 a la estrategia nacional para eliminar, de manera gradual, su aplicación en áreas agrícolas. Para ello, realizó un diagnóstico sobre el uso de este herbicida en ANP, preguntando a los productores su opinión, si conocían “proyectos agroecológicos” y si podían ubicar aliados para promover el abandono del glifosato. Sin embargo, ante la falta de una alternativa viable, México postergó en 2024 su prohibición (Barragán, 2024).

Más allá de la aplicación de normatividad, se ha reportado que una estrategia efectiva para cambiar prácticas de manejo de plaguicidas es capacitar a los productores y colocarlos en el centro de la toma de decisión (Kombusadee y Kurukodt, 2021), pues así desarrollan su conocimiento sobre medidas de seguridad en torno a estos productos, sus efectos sobre la salud y las consecuencias ambientales asociadas a su uso (González Ordóñez, 2014; Muñoz-Quezada *et al.*, 2019). Por ello, tanto para promover un manejo racional de plaguicidas como para sustituirlos por otras prácticas, es crucial documentar primero los plaguicidas empleados y la forma en que los productores utilizan este tipo de agroquímicos (Bernardino, 2013). No obstante, no se han realizado investigaciones al respecto dentro

de reservas de biosfera en México, espacios donde es urgente promover prácticas agrícolas que garanticen la conservación de la biodiversidad.

Por lo anterior, con la finalidad de explorar este fenómeno en la Reserva de la Biosfera Sierra Gorda de Querétaro, la presente investigación se planteó el objetivo de conocer el uso de plaguicidas en el valle agrícola de Concá, la zona de mayor producción de hortalizas de riego en la reserva. En ese sentido, las preguntas que orientaron el diseño del proyecto fueron:

- ¿Cuáles son las características de los plaguicidas empleados en la producción de hortalizas en el valle de Concá?
- ¿Qué prácticas de manejo de plaguicidas emplean los productores?
- ¿Qué conocimiento tienen los productores sobre riesgos a la salud y posibles impactos en el medio ambiente por el uso de plaguicidas?
- ¿Conocen los productores alternativas al uso de plaguicidas?
- ¿Qué percepción tienen de estas?

En el siguiente apartado del artículo se describen las características de la Reserva de la Biosfera Sierra Gorda y del valle agrícola de Concá, tras lo cual se desarrolla la metodología con la que se respondieron las preguntas. A continuación se presentan los principales resultados obtenidos, seguidos de la discusión de los hallazgos a la luz de otras investigaciones sobre el tópico. Finalmente, en las conclusiones se sintetizan las principales contribuciones del artículo y se plantean rutas de investigación futura.

Materiales y métodos

El valle agrícola de Concá

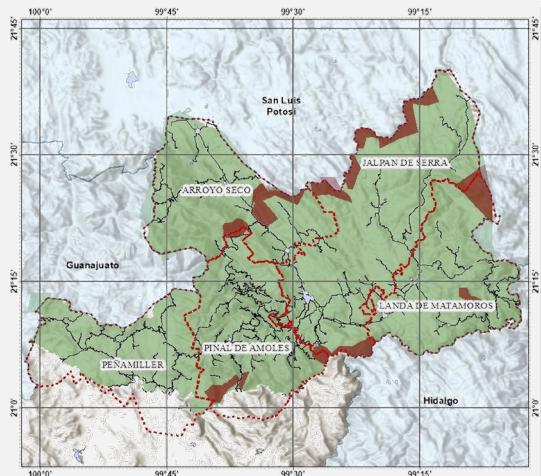
El estudio se llevó a cabo durante el 2022 en un valle agrícola de la Reserva de la Biosfera Sierra Gorda de Querétaro (Figura 1). Además de la gran diversidad de ecosistemas que aloja, la reserva se considera una zona estratégica en términos de recarga hídrica (Instituto Nacional de Ecología [INE], 1999), por lo que es parte de una de las reservas potenciales de agua más importantes del país (Comisión Nacional del Agua [CONAGUA], 2011).

A pesar de su carácter estratégico para la seguridad hídrica y la conservación de la biodiversidad, se han documentado problemáticas vinculadas con la degradación ambiental. Ejemplos

de estas son la ganadería extensiva que afecta la regeneración natural de los bosques, la propagación de especies acuáticas invasoras y la contaminación de ríos por descargas residuales y por el uso desmedido de agroquímicos (Bohórquez *et al.*, 2003; De la Llata Gómez, 2006; INE, 1999; Leung *et al.*, 2002; Sánchez-Cordero y Figueroa, 2007; Vitousek *et al.*, 1996).

Figura 1.

Reserva de la Biosfera Sierra Gorda



Fuente: INE (1999)

La principal zona productora de hortalizas en la reserva se encuentra en el valle agrícola de Concá (Figura 2). La localidad, en el municipio de Arroyo Seco y parte de la Sierra Gorda, es reconocida por albergar una de las cinco misiones franciscanas patrimonio de la humanidad, así como por una serie de afloramientos de agua subterránea que forman pozas naturales y que confluyen en un arroyo tributario del río Santa María.

Dentro de la zonificación de la reserva, dicho valle pertenece a la subzona de aprovechamiento intensivo, por lo que se permite realizar actividades agropecuarias (INE, 1999). La mayor parte de la producción de hortalizas se desarrolla a cielo abierto colocando cubiertas plásticas sobre el suelo y, en menor cantidad, bajo invernadero (Carbajal, 2019). Gracias a los manantiales antes mencionados, se lleva a cabo una agricultura de riego para la producción de monocultivos, principalmente chile (*Capsicum annuum*), jitomate (*Solanum lycopersicum*), calabaza (*Cucurbita pepo*), tomate de cáscara (*Physalis philadelphica*) y maíz (*Zea mays*). Con respecto de la producción

frutícola, se tienen extensiones importantes de frutales como naranja (*Citrus × sinensis*) y mango (*Mangifera indica*).

Figura 2.

Ubicación del valle agrícola de Concá



Fuente: elaboración propia

En el valle se ha documentado la presencia de jornaleros migrantes indígenas del pueblo xi'iui, quienes con frecuencia se desplazan desde San Luis Potosí para emplearse en la región como jornaleros agrícolas, desarrollando actividades como siembra, cosecha y aplicación de plaguicidas (Maestría en Gestión de Cuencas Integradas, 2014).

Metodología de la investigación

El estudio adoptó un diseño descriptivo orientado a construir una línea base sobre el uso y manejo de plaguicidas en el valle agrícola de Concá. La recolección de datos se realizó mediante entrevistas aplicadas en campo y en vivienda a productores seleccionados por bola de nieve, técnica adecuada cuando no existe un padrón completo y se requiere identificar informantes con experiencia directa en las prácticas de interés. Se conformó una muestra no probabilística de 20 informantes, cuyos criterios de inclusión fueron: tener interés expreso en participar, una edad entre 20 y 70 años, y que al menos 0.5 haya cultivado en el valle; el criterio de exclusión fue la negativa posterior a la lectura del consentimiento informado que detallaba los objetivos e implicaciones del estudio. Sin embargo, del total de agricultores que cumplían con los criterios mencionados,

ninguno rechazó la entrevista y solo uno no pudo ser entrevistado por encontrarse fuera de la región. Este enfoque, si bien no probabilístico, es adecuado para caracterizar el uso de plaguicidas en un contexto con información limitada, y aporta una línea de base adoptable para estudios futuros.

El instrumento fue un guion de entrevista semiestructurado con preguntas abiertas y cerradas, diseñado para documentar variables sociodemográficas y múltiples aspectos ligados con el manejo de plaguicidas (Tabla 1). Al elaborarlo, se retomaron ítems de investigaciones afines (Bernardino, 2013; García *et al.*, 2002) y se incorporó la retroalimentación de dos investigadores del Centro de Investigación y Desarrollo Tecnológico en Materia Agrícola, Acuícola, Pecuaria y Forestal de la Universidad Autónoma de Querétaro. La aplicación del instrumento fue precedida por una prueba piloto que se aplicó a una muestra pequeña de productores, tras lo cual se ajustaron la redacción y secuencia de las preguntas.

Las entrevistas se condujeron como conversaciones guiadas con las que se recogieron tanto prácticas observadas por los productores como sus reflexiones. Además, se les solicitaba su consentimiento para registrar la interacción, y si la respuesta era favorable se procedía a utilizar una grabadora digital.

Tabla 1.

Apartados del instrumento de recolección de información

Apartado	Descripción
Información socioeconómica	Información de los productores, como nombre, edad, escolaridad, años dedicados a la agricultura, último año de escolaridad y superficie sembrada.
Conocimiento y uso de plaguicidas	Registro de los tipos de plaguicidas (herbicidas, fungicidas, bactericidas, insecticidas) utilizados para el control y eliminación de las diferentes plagas que afectan los cultivos de producción agrícola.
Percepción de la exposición a plaguicidas	Registro de la perspectiva sobre las afectaciones del uso de plaguicidas a la salud.
Síntomas asociados al uso de plaguicidas	Registro de los principales síntomas (dolor de cabeza, visión borrosa, mareos, irritación en la piel, náuseas, vómito, desorientación) reportados cuando los productores o alguno de sus trabajadores son aplicadores.

Hábitos durante y después de la aplicación de plaguicidas	Registro de hábitos de los productores que también son aplicadores de plaguicidas, con la finalidad de identificar hábitos en torno al lavado de manos, consumo de alimentos o bebidas, entre otros, que pudieran poner en riesgo su salud. Asimismo, documentación de algunas prácticas durante el uso de plaguicidas por parte de los productores que no son aplicadores y contratan personal para realizar este trabajo.
Manejo de envases y percepción del daño al medio ambiente	Registro de las prácticas de los productores referentes al manejo de envases y su percepción del impacto al medio ambiente.
Uso de equipo de protección	Identificación del equipo de protección que usan o no los productores-aplicadores u ofrecen a sus empleados al momento de aplicar plaguicidas. Asimismo, registro de sus hábitos, los sitios donde preparan las mezclas y qué razón los convencería de usar el correcto equipo de protección.
Conocimiento y uso de alternativas de plaguicidas	En este apartado se documentó el conocimiento e interés por alternativas a los plaguicidas utilizados.

Fuente: elaboración propia

De manera paralela, se realizaron observaciones directas del uso de plaguicidas en las parcelas y una entrevista a personal perteneciente al Comité Estatal de Sanidad Vegetal de Querétaro, A.C. (CESAVEQ, A.C.) con la finalidad de conocer si intervienen para brindar a los productores asesoría sobre el manejo adecuado de los fitosanitarios.

Una vez que la información se sistematizó en Excel, se analizó y visualizó en Google Data Studio para generar tablas y gráficos descriptivos de frecuencias y proporciones por categoría. Los datos de los plaguicidas se clasificaron con base en su nombre comercial, presentación, acción específica, grupo químico, ingrediente activo, categoría toxicológica, propósito externado (plaga y cultivo) y pertenencia a la lista PAN, la cual presenta plaguicidas altamente peligrosos que han sido prohibidos en múltiples países. En relación con las prácticas de manejo, el software permitió cruzar variables sociodemográficas con prácticas específicas (p. ej., escolaridad × uso de equipo de protección; edad × disposición de envases).

Resultados

Los resultados se presentan organizados en dos subsecciones. La primera aborda el perfil sociodemográfico de los productores entrevistados, así como los cultivos predominantes en el valle agrícola de Concá y las características fisicoquímicas y toxi-

cológicas de los plaguicidas empleados. La segunda describe detalladamente las percepciones y prácticas relacionadas con el manejo de estas sustancias, enfocándose en las conductas de los productores, el uso de equipo de protección, el almacenamiento, la disposición final de envases vacíos y la percepción sobre los impactos en la salud humana y el medio ambiente.

Perfil sociodemográfico y uso de plaguicidas

La muestra estuvo integrada por 20 productores agrícolas del valle de Concá con edades que oscilaron entre los 25 y 67 años. La mayoría (55%) se encuentra en el rango de adultos de 36 a 64 años, seguido por adultos mayores (25%) y jóvenes de entre 18 y 35 años (20%). En cuanto al nivel educativo, predominan los productores con educación básica (40%), seguidos de quienes alcanzaron educación superior (25%) y media superior (20%), mientras que un 15% no tiene estudios formales. Destaca la presencia de una mujer (5%), jefa de familia, responsable directa de 12 hectáreas dedicadas a la producción agrícola.

En relación con los cultivos predominantes, la mayor frecuencia se observó en maíz (22.1%), chile en diversas variedades (20.8%), calabaza (19.5%), jitomate (18.2%), tomate de cáscara (14.3%) y cebolla (5.1%). Respecto a la frecuencia en el uso de plaguicidas, los cultivos con más aplicaciones fueron el chile, la calabaza y el jitomate, debido a la alta presión fitosanitaria que estos presentan. Además, los agricultores reportaron la presencia de 16 diferentes plagas, principalmente insectos como la mosca blanca, araña roja y trips, así como problemas fúngicos como tizón y oídio.

En relación con las características fisicoquímicas y toxicológicas de los plaguicidas utilizados, se documentaron 81 productos diferentes, mayoritariamente insecticidas (55.6%), seguidos por fungicidas (24.7%) y herbicidas (13.6%). Los productos comerciales más empleados fueron Palpus, Tamarón, Cipermetrina y Confidor 70 WG (Tabla 2). Cabe destacar que el 70.4% de estos productos se clasifican como Plaguicidas Altamente Peligrosos (PAPs), de acuerdo con la lista internacional PAN, destacando ingredientes activos como imidacloprid y fipronil, restringidos en diversas regiones por su impacto negativo sobre polinizadores.

Respecto a las categorías toxicológicas, predominan los plaguicidas de categoría IV (poco peligrosos, 54.3%), aunque también se utilizan productos altamente tóxicos, de categoría I (4.9%), como Paraquat y Metamidofos, cuyo uso está restringido o prohibido en diversos países por el alto riesgo a la salud que implican. También es notable el uso de glifosato, en la actualidad sujeto a una prohibición gradual en México debido a su posible efecto cancerígeno.

Tabla 2.

Características químicas y toxicológicas de los plaguicidas utilizados con mayor frecuencia en la agricultura del valle agrícola de Concá

Nombre comercial	Categoría toxicológica (CT) ¹	Grupo químico (GQ)	Ingrediente activo (IA)	Lista Pesticide Action Network International	Tóxico para abejas ²
Vydate	I	carbamatos	oxamil	Sí	Sí
Agrimec 1.8% CE	II	pentaciclina	abamectina		Sí
Regent 4 SC	II	fenilpirazoles	fipronil		Sí
Tamarón	II	organofosforado	metamidofos		Sí
Cipermetrina	III	piretroides	cipermetrina		Sí
Confidor 70 WG	IV	neonicotinoides	imidacloprid		Sí
Muralla Max	IV	neonicotinoides	imidacloprid		Sí
Movento	IV	spinosyn	spinetoram		Sí
Coragen	V	diamidas	clorantranili-prol		No
Palgus	V	spinosyn	spinetoram		Sí

Fuente: elaboración propia

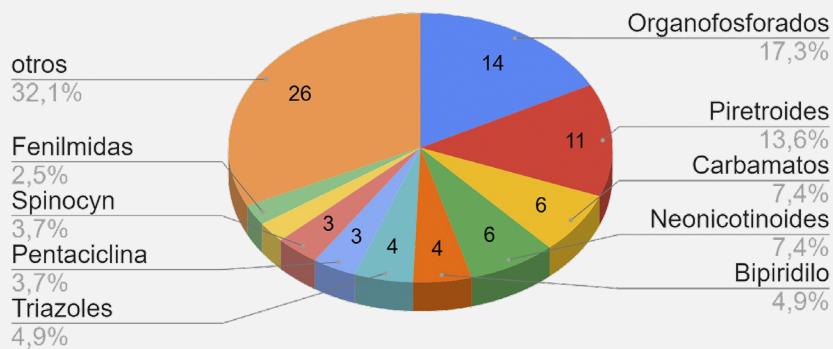
Se identificaron 39 grupos químicos, siendo los principales los organofosforados (17.3%), seguidos de los piretroides sintéticos (13.6%), los carbamatos (7.4%) y los neonicotinoides (7.4%) (Figura 3).

¹ Para determinar la categoría toxicológica se consultó el registro sanitario de plaguicidas, nutrientes vegetales y LMR, elaborado por la Comisión Federal para la Protección contra Riesgos Sanitarios (COFEPRIS).

² Toxicidad alta para las abejas por tener una dosis letal media menor de 2 microgramos por abeja (DL50 $\mu\text{g}/\text{abeja} < 2$).

Figura 3.

Principales grupos químicos utilizados en la agricultura
del valle de Concá

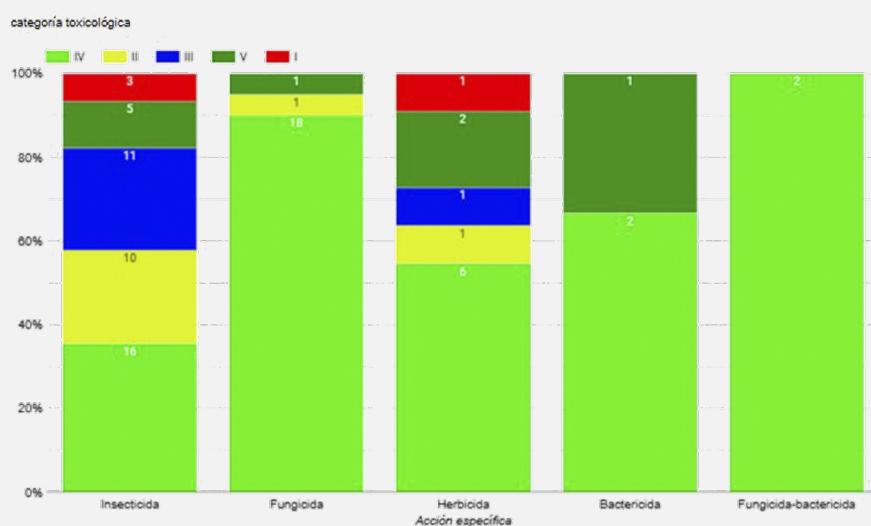


Fuente: elaboración propia

Con respecto a la acción biológica y la categoría toxicológica, los cinco principales grupos se conforman por los fungicidas categoría IV (18), los insecticidas categoría IV (16), los insecticidas categoría III (11), los insecticidas categoría II (10) y los herbicidas categoría IV (6) (Figura 4).

Figura 4.

Uso de productos según su acción biológica y categoría
toxicológica utilizadas en el valle agrícola de Concá



Fuente: elaboración propia

*Prácticas asociadas
al manejo de plaguicidas*

En cuanto a las prácticas de manejo, se observó que la mayoría de los agricultores rota frecuentemente los productos debido a la resistencia generada por las plagas, situación que conlleva aumentos en las dosis o en la frecuencia de aplicaciones. Algunos productores realizan aplicaciones con regularidad, lo que refleja una intensificación significativa respecto a prácticas anteriores:

Antes solo aplicábamos productos cada ocho días, ahora las aplicaciones se realizan cada segundo o tercer día
(productor #4, comunicación personal, 2022).

La mayoría de los productores refiere seguir las instrucciones del asesor o del envase, junto con aplicaciones preventivas al menos una vez por semana. Algunos usan las aplicaciones desde el trasplante o siembra como preventivos, y otros ejecutan monitoreos por la parcela y, en caso de detectar plaga, aplican producto dependiendo de su incidencia y de la fenología de la planta o de acuerdo al daño identificado:

Llevo a cabo monitoreos por la parcela y si detecto una plaga tomo una muestra y la llevo con el ingeniero en el expendio de plaguicidas para que me venda algún producto específico para combatir la plaga
(productor #12, comunicación personal, 2022).

En relación con la interpretación de las etiquetas de seguridad, el 85% de los entrevistados afirma poder interpretar las etiquetas de los productos, aunque paradójicamente el 65% reportó haber sufrido accidentes relacionados con su manejo, lo cual revela una brecha importante entre el conocimiento y la práctica segura.

En términos del uso de equipo de protección personal, solamente el 55% de los productores proporciona alguna forma de protección a sus trabajadores, principalmente cubrebocas y botas. La incomodidad y las condiciones climáticas son factores que afectan negativamente su uso, cuestión que eleva considerablemente el riesgo de intoxicación. Además, solo el 20% de los agricultores usa guantes durante la preparación de mezclas, mientras que el 80% restante no emplea protección alguna.

Los hábitos posteriores a las aplicaciones también presentan riesgos considerables. Si bien el lavado de manos es universal, solo el 85% de los entrevistados emplea jabón. Sumado a ello,

prácticas inseguras como comer, beber o fumar durante las aplicaciones fueron reportadas por el 20% de ellos. El manejo inadecuado del equipo de aspersión es común, pues el 90% lo lava directamente en canales o parcelas, lo que aumenta el potencial de contaminación ambiental del suelo y cuerpos de agua.

Respecto al almacenamiento de los plaguicidas, si bien la mayoría reporta tener un espacio específico, es frecuente encontrar casos en que estos espacios también se utilizan para almacenar alimentos o realizar actividades domésticas, lo que incrementa los riesgos de intoxicación crónica y accidental.

En cuanto a la gestión de residuos, aunque existe infraestructura proporcionada por CESAVEQ, A.C. para el acopio temporal de envases vacíos, aún persisten prácticas incorrectas como su quema o abandono en campos y canales de agua. Asimismo, solo el 15% de los entrevistados realiza la práctica recomendada del triple lavado antes de depositar los envases en los puntos de acopio establecidos.

Por lo que se refiere a la percepción sobre los efectos de los plaguicidas, la totalidad de los productores reconoce los riesgos potenciales para la salud y cita síntomas frecuentes como mareos, vómitos, náuseas y visión borrosa asociados al uso de productos específicos como Lannate, Tamarón y Vydate. Del mismo modo, existe amplia conciencia del daño ambiental que ocasionan estos agroquímicos, especialmente en cuerpos de agua y suelos.

Finalmente, es alentador que el 65% de los productores conozca alternativas para el control de plagas, como extractos de neem, ajo y jabón potásico. Esta disposición muestra potencial para fomentar y expandir la implementación de técnicas de manejo integrado de plagas en lugar del uso intensivo de agroquímicos.

Discusión

En el estudio destaca que un elevado porcentaje de los plaguicidas utilizados en Concá pertenece a categorías altamente peligrosas según la clasificación de Pesticide Action Network International (2024). Es preocupante el uso de ingredientes activos como imidacloprid y fipronil, conocidos por su toxicidad en polinizadores, dado que se han limitado en otras partes del mundo debido a sus riesgos ambientales. En este sentido, el empleo generalizado de estos productos en Concá refleja una alarmante brecha en la implementación efectiva de normativas ambientales en reservas de biosfera. Además, la prevalencia de

sustancias altamente peligrosas, como paraquat y metamidofos, ambas prohibidas en numerosos países, resalta las debilidades institucionales en la regulación del mercado de plaguicidas en México, misma que debería ser especialmente estricta dentro de Áreas Naturales Protegidas.

Los patrones de cultivo en el valle reflejan una producción intensiva de hortalizas, principalmente chile, calabaza y jitomate, con alta dependencia de agroquímicos. Estos hallazgos son consistentes con estudios realizados en otras regiones agrícolas de México, donde los monocultivos y sistemas intensivos suelen ir acompañados de un uso significativo de plaguicidas para mantener rendimientos comerciales altos. Por ejemplo, Galindo *et al.* (2021) documentaron prácticas similares en el valle agrícola de Rioverde y Ciudad Fernández, destacando la aplicación de productos altamente peligrosos en cultivos de hortalizas.

El perfil socioeconómico identificado refleja un amplio rango educativo, donde casi la mitad de los agricultores cuenta con estudios medios o superiores, lo que podría favorecer una mayor predisposición hacia prácticas agrícolas mejor informadas. Trabajos previos han demostrado que el nivel educativo está vinculado a la adopción de tecnologías y la receptividad a información nueva sobre prácticas agrícolas (Galindo *et al.*, 2000), evidencia que sugiere que la población estudiada en el valle agrícola de Concá podría beneficiarse de intervenciones didácticas orientadas a mejorar la gestión de plaguicidas. En particular, se ha probado que la escolaridad y el acceso a capacitaciones se asocian a un mayor uso de equipo de protección y a mejores conductas de limpieza antes y después de la aspersión (Ben Khadda *et al.*, 2021).

En relación con las prácticas de manejo de plaguicidas, los agricultores de Concá tienden a realizar aplicaciones frecuentes y mixtas debido a la resistencia observada en las plagas. Esta dosificación “basada en la experiencia” ha sido documentada por otros estudios (Sinchire *et al.*, 2023) que la describen como una práctica que no solo incrementa los costos económicos, sino también agrava riesgos ambientales y de salud. Bernardino (2013) registró prácticas similares en comunidades de Chiapas, evidenciando que esta situación prevalece en diferentes regiones agrícolas del país. Dicha coincidencia pone de relieve la necesidad urgente de intervenciones educativas dirigidas específicamente a cambiar las prácticas de manejo de estos productos.

Por otra parte, aunque la mayoría de los productores entrevistados afirman comprender las etiquetas de los plaguicidas, los

numerosos accidentes reportados indican inconsistencias significativas en la práctica. López-Martínez *et al.* (2018) identificaron que trabajadores agrícolas con menor nivel educativo o barreras lingüísticas, como en comunidades indígenas, presentan un riesgo incrementado de exposición debido a dificultades en la comprensión de etiquetas y recomendaciones de seguridad. Esta problemática es particularmente relevante en Concá, donde la presencia de jornaleros indígenas, principalmente del pueblo xi'ui, añade una complejidad cultural y lingüística a considerar en programas de formación en seguridad laboral.

La brecha entre saber y hacer se manifiesta también en el uso de equipo de protección personal. Si bien los productores de Concá son capaces de mencionar el equipo adecuado, su baja adherencia al deber ser es preocupante. Tal y como ocurre en otras zonas agrícolas (Istriningsih *et al.*, 2022; Monger *et al.*, 2023; Sinchire *et al.*, 2023), la mayoría de los agricultores no emplea protección suficiente durante la preparación y aplicación de plaguicidas, lo que incrementa considerablemente los riesgos de exposición. Las razones comunicadas por los entrevistados, como la incomodidad y el calor, deben abordarse mediante capacitaciones prácticas y adaptadas a la cultura, reforzando la educación continua sobre los riesgos asociados al manejo inseguro de plaguicidas.

En cuanto a las prácticas postaplicación y el manejo de envases, los resultados indican riesgos significativos para el ambiente. Aunque existe una infraestructura básica para la gestión de envases, persisten prácticas inadecuadas, como su abandono y quema en las parcelas. Lo mismo ha sido observado en otras zonas agrícolas donde el conocimiento declarado por los productores no coincide con su comportamiento (Vásquez *et al.*, 2025). Esta disparidad se entiende como un llamado a reforzar el cumplimiento normativo y a diseñar capacitaciones con un enfoque basado en resultados, es decir, incorporando la medición del cumplimiento de métricas clave. En otras Áreas Naturales Protegidas se ha documentado la gravedad de tales prácticas, reflejada en la contaminación de cuerpos de agua subterráneos por residuos agroquímicos (Polanco-Rodríguez *et al.*, 2020). La situación observada en Concá confirma estas preocupaciones y requiere de intervenciones directas de la Comisión Nacional de Áreas Naturales Protegidas (CONANP).

Finalmente, el reconocimiento amplio de los agricultores sobre los riesgos para la salud y el ambiente, junto con su disposición hacia alternativas agroecológicas, abre oportunidades para transitar hacia otras prácticas agrícolas. El conocimiento y

uso ocasional de opciones como los biofermentos y extractos naturales indican una apertura potencial ante métodos de manejo integrado de plagas que incorporen productos basados en especies nativas con potencial bioinsecticida.

Conclusiones

Los productores del valle de Concá hacen un uso intensivo y diversificado de plaguicidas, predominando los insecticidas, seguidos por los fungicidas y herbicidas. Se identificaron más de 80 productos comerciales, muchos de ellos clasificados como Plaguicidas Altamente Peligrosos (PAPs), que incluyen ingredientes activos como metamidofos, imidacloprid, fipronil y oxamil. Estos productos conllevan riesgos significativos para la salud humana, la fauna silvestre, en particular los polinizadores, y los cuerpos de agua de la región, como el río Santa María.

Las prácticas observadas revelan un manejo deficiente durante la preparación, aplicación y almacenamiento de estos productos. El uso de equipo de protección personal es limitado y, en muchos casos, inadecuado. Asimismo, la quema o abandono de envases vacíos y el lavado del equipo en canales o parcelas aumentan la probabilidad de contaminación directa del suelo y el agua. Esta situación es en especial alarmante dado el carácter protegido del territorio.

Los productores reconocen los efectos nocivos de los plaguicidas en la salud, con síntomas frecuentes como mareos, vómitos y visión borrosa, así como en el ambiente, específicamente en el agua y el suelo. Si bien la mayoría declara saber interpretar las etiquetas, una proporción significativa ha sufrido accidentes durante la aplicación, lo cual evidencia una brecha entre el conocimiento declarado y las prácticas reales.

Frente a este panorama, resulta indispensable establecer mecanismos más efectivos de control para restringir el uso de sustancias altamente tóxicas, atendiendo al estatus de la zona como reserva de biosfera. Para ello, se requiere la intervención de la CONANP, de forma que se implemente un programa efectivo de restricción escalonada de PAPs.

Como complemento, sería conveniente que investigadores de la Universidad Autónoma de Querétaro desarrollaran alternativas al uso de plaguicidas basadas en especies nativas con potencial bioinsecticida. La voluntad de algunos productores por adoptar mejores prácticas representa un punto de partida para lograr la transferencia tecnológica, pero es necesario contar con productos validados en campo.

Como paso inmediato, podrían brindarse capacitaciones focalizadas y culturalmente pertinentes en torno al manejo racional de plaguicidas, con contenidos y formatos ajustados a los actores que interactúan con ellos: productores, jornaleros migrantes xi'iui, jóvenes aplicadores, y mujeres que participan en la mezcla y lavado. En lugar de cursos extensos y teóricos, convendría estructurar micromódulos prácticos, con duración de dos a tres horas, impartidos directamente en las parcelas y enfocados en destrezas específicas: orden correcto de mezcla y medición (evitando la dosificación “por experiencia”), revisión y calibración del equipo de aspersión, uso del equipo de protección según el producto a emplear, interpretación funcional de etiquetas y manejo de envases vacíos. Estos contenidos podrían apoyarse en materiales bilingües (español-xi'iui) y videos cortos disponibles en el teléfono celular.

Para asegurar que la formación se traduzca en cambios observables, es aconsejable definir métricas simples de desempeño y verificación. En el corto plazo, se puede monitorear el dominio de habilidades críticas, el aumento en el acopio de envases y la disminución de síntomas postaplicación reportados por el centro de salud. Con ello, la capacitación deja de ser un evento aislado y se convierte en un proceso verificable.

Reconocemos que la selección no probabilística por bola de nieve, si bien resultó funcional ante la ausencia de un padrón completo de agricultores, reduce la representatividad estadística. Sin embargo, la escala del valle permitió entrevistar a prácticamente la totalidad de los agricultores identificados. En estudios futuros, sería interesante realizar una triangulación de los datos con entrevistas a más actores involucrados, por ejemplo, la dirección de la reserva y los vendedores de fitosanitarios.

Finalmente, ante la ausencia de estudios específicos sobre los efectos ambientales y de salud asociados al uso de plaguicidas en la región, es urgente impulsar investigaciones que analicen su impacto en especies clave como las abejas, en la salud de los aplicadores y en la calidad del suelo y el agua. En ese sentido, como complemento a la documentación de los síntomas en la salud autorreportados por los productores, sería conveniente seguir el diseño de investigaciones que correlacionan lo declarado con biomarcadores que estiman la exposición reciente a organofosforados y carbamatos (Monger *et al.*, 2023). Lo anterior permitiría vincular, con evidencia fisiológica, el impacto de la aplicación de plaguicidas.

Agradecimientos

Al Fondo para el Fortalecimiento de la Investigación, Vinculación y Extensión de la Universidad Autónoma de Querétaro (FONFIVE-UAQ 2024).

Referencias

- Albert, L.A. y Benítez, J.A. (2005). Impacto ambiental de los plaguicidas en los ecosistemas costeros. En A.V. Botello, J. Rendón von Osten, G. Gold-Bouchot y C. Agraz-Hernández (Eds.), *Golfo de México. Contaminación e impacto ambiental: diagnóstico y tendencias* (pp. 157-176). Universidad Autónoma de Campeche/Universidad Nacional Autónoma de México/Instituto Nacional de Ecología/Universidad Juárez Autónoma de Tabasco/Universidad Istmo Americana/Gobierno del Estado de Veracruz.
- Alcántara, M. (2008). Plan de acción para la erradicación del uso ilegal de venenos en el medio natural en Aragón. En *Actas del Seminario Mortalidad por intoxicación en aves necrófagas. Problemática y soluciones* (pp. 9-17). España. <https://quebrantahuesos.org/wp-content/uploads/2018/06/actasdelseminario.pdf>
- Barragán, A. (27 marzo del 2024) *México posterga la prohibición del glifosato ante la falta de alternativas viables para el campo*. El País. <https://elpais.com/mexico/2024-03-27/mexico-posterga-la-prohibicion-del-glifosato-ante-la-falta-de-alternativas-viables-para-el-campo.html>
- Barranco León, M.N., Vergara, C.H. y Mora Alcívar, A.U. (2015). Conocimiento actual del efecto de los insecticidas derivados de la nicotina (neonicotinoides) en las poblaciones de abejas polinizadoras. *Revista Científica y Tecnológica UPSE*, 2(3), 118-122. <https://doi.org/10.26423/rctu.v2i3.66>
- Ben Khadda, Z., Fagroud, M., El Karmoudi, Y., Ezrari, S., Berni, I., De Broe, M., Behl, T., Bungau, S.G. y Sqalli Houssaini, T. (2021). Farmers' knowledge, attitudes, and perceptions regarding carcinogenic pesticides in Fez Meknes region (Morocco). *International Journal of Environmental Research and Public Health*, 18(20). <https://doi.org/10.3390/ijerph182010879>
- Bernardino Hernández, H.U. (2013). *Plaguicidas: percepciones de su uso en comunidades rurales de Los Altos de Chiapas* [Tesis de doctorado]. El Colegio de la Frontera Sur. <https://ecosur.repositorioinstitucional.mx/jspui/handle/1017/1715>
- Bohórquez Molina, J.G., García Espejel, A., Prieto Hernández, D. y Rodríguez Espinosa, M.A. (2003). *Los pobres del campo queretano. Política social y combate a la pobreza en el medio rural de Querétaro*. Instituto Nacional de Antropología e Historia.
- Brockington, D. y Wilkie, D. (2015). Protected areas and poverty. *Philosophical Transactions of the Royal Society B*, 370. <http://dx.doi.org/10.1098/rstb.2014.0271>

- Brühl, C.A., Bakanov, N., Köthe, S., Eichler, L., Sorg, M., Hörren, T., Mühlenthaler, R., Meinel, G. y Lehmann, G.U.C. (2021). Direct pesticide exposure of insects in nature conservation areas in Germany. *Scientific Reports*, 11. <https://doi.org/10.1038/s41598-021-03366-w>
- Carabajal Becerra, O. (2019). *Evaluación de la sustentabilidad de sistemas agropecuarios del valle de la microcuenca de Concá, Arroyo Seco, Querétaro* [Tesis de maestría]. Universidad Autónoma de Querétaro. <https://ri-ng.uaq.mx/xmlui/handle/123456789/1941>
- Comisión Nacional del Agua. (2011). *Identificación de reservas potenciales de agua para el medio ambiente en México*. <https://www.conagua.gob.mx/conagua07/publicaciones/publicaciones/sgt-3-11media.pdf>
- De la Llata Gómez, R. (Coord.) (2006). *Caracterización de los ecosistemas, cambios en el uso del suelo y unidades paisajísticas en la Reserva de la Biósfera “Sierra Gorda” de Querétaro*. Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Querétaro.
- Galindo González, G., Tabares Rodríguez, W.C. y Gómez Aguirre, G. (2000). Caracterización de productores agrícolas de seis distritos de desarrollo rural de Zacatecas. *Terra Latinoamericana*, 18(1), 83-92. <https://www.redalyc.org/pdf/573/57318109.pdf>
- Galindo Mendoza, M.G., Aldaz Galicia, N.Y., Contreras Servín, C., Saldierena Salas, G. y Almendarez Rocha, S.D. (2021). Articulación territorial de la gestión de plaguicidas en el marco de la protección fitosanitaria. El caso del valle agrícola de Rioverde y Ciudad Fernández, San Luis Potosí. *Investigaciones Geográficas*, (106). <https://doi.org/10.14350/ig.60415>
- García, A.M., Ramírez, A. y Lacasaña, M. (2002). Prácticas de utilización de plaguicidas en agricultores. *Gaceta Sanitaria*, 16(3), 236-240. https://scielo.isciii.es/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0213-91112002000300007
- González Ordóñez, A. (2014). Programa de concientización para el uso de plaguicidas en la comunidad de productores agrícolas de Butare, municipio Colina, estado Falcón, Venezuela. *Multiciencias*, 14(3), 257-267. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=90432809003>
- Instituto Nacional de Ecología. (1999). *Programa de Manejo de la Reserva de la Biosfera Sierra Gorda*. Secretaría de Medio Ambiente, Recursos Naturales y Pesca.
- Istriningsih, Dewi, Y.A., Yulianti, A., Hanifah, V.W., Jamal, E., Dadang, Sarwani, M., Mardiharini, M., Anugrah, I.S., Darwis, V., Suib, E., Her teddy, D., Sutriadi, M.T., Kurnia, A. y Harsanti, E.S. (2022). Farmers' knowledge and practice regarding good agricultural practices (GAP) on safe pesticide usage in Indonesia. *Helijon*, 8(1). <https://doi.org/10.1016/j.helijon.2021.e08708>

- Kombusadee, T. y Kurukodt, J. (2021). Development of a training manual for reducing use of pesticides by para rubber farmers at Bueng Khan province, Thailand. *Journal of Education and Learning*, 10(3), 48. <https://doi.org/10.5539/jel.v10n3p48>
- Leung, B., Lodge, D.M., Finnoff, D., Shogren, J.F., Lewis, M.A. y Lamberti, G. (2002). An ounce of prevention or a pound of cure: bioeconomic risk analysis of invasive species. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences*, 269(1508), 2407-2413. <https://doi.org/10.1098/rspb.2002.2179>
- López-Martínez, G., Paredes-Céspedes, D.M., Rojas-García, A.E., Medina-Díaz, I.M., Barrón-Vivanco, B.S., González-Arias, C.A. y Bernal-Hernández, Y.Y. (2018). Implicaciones del contexto socioeconómico en la exposición a plaguicidas en jornaleros huicholes. *Revista Internacional de Contaminación Ambiental*, 34, 73-80. <https://doi.org/10.20937/RICA.2018.34.esp01.05>
- Maestría en Gestión de Cuencas Integradas (2014). Caracterización y diagnóstico socioambiental de la microcuenca de Concá. Universidad Autónoma de Querétaro.
- Monger, A., Mahat, K., Dorjee, Om, N., Mongar, P., Dorji, T., Jamtsho, S., Wangdi, K., Wangdi, C., Jamtsho, T. y Chettri, V. (2023). Assessment of exposure to pesticides and the knowledge, attitude and practice among farmers of western Bhutan. *PLOS One*, 18(5). <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0286348>
- Monsalve Buriticá, S. (2019). Metales pesados, plaguicidas y efectos de los disruptores endocrinos en la salud humana y animal. En S. Monsalve Buriticá (Ed.), *Medicina de la conservación y enfermedades de la fauna silvestre* (pp. 73-82). Fondo Editorial Biogénesis.
- Muñoz-Quezada, M.T., Lucero, B., Bradman, A., Steenland, K., Zúñiga, L., Calafat, A.M., Ospina, M., Iglesias, V., Muñoz, M.P., Buralli, R.J., Fredes, C. y Gutiérrez, J.P. (2019). An educational intervention on the risk perception of pesticides exposure and organophosphate metabolites urinary concentrations in rural school children in Maule Region, Chile. *Environmental Research*, 176. <https://doi.org/10.1016/j.envres.2019.108554>
- Paré, S., Kaboré, B., Stechert, C., Kolb, M., Bahadir, M. y Bonzi-Coulibaly, L.Y. (2014). Agricultural practice and pesticide residues in soils and pool sediments from the Pendjari biosphere reserve area in Benin, West Africa. *CLEAN-Soil, Air, Water*, 42(11), 1593-1603. <https://doi.org/10.1002/clen.201200371>
- Pesticide Action Network International (2024). *PAN International list of highly hazardous pesticides*. https://pan-international.org/wp-content/uploads/PAN_HHP_List.pdf
- Perilla Melo, J.E. (2020). Afectación de colonias apícolas por la utilización del imidacloprid para el control de insectos plaga en zonas

- de producción agrícola [Monografía]. Universidad Nacional Abierta y a Distancia. <https://repository.unad.edu.co/handle/10596/37250>
- Polanco-Rodríguez, A.G., Arcega-Cabrera, F., Araujo-León, J.A. y Lamas-Cosío, E. (2020). Organochlorine pesticides and potentially toxic elements in groundwater from a protected reserve in the Maya region of Hopelchen, Mexico. *Bulletin of Environmental Contamination and Toxicology*, 104, 568-574. <https://doi.org/10.1007/s00128-020-02848-3>
- Sánchez-Cordero, V. y Figueroa, F. (2007). La efectividad de las Reservas de la Biósfera en México para contener procesos de cambio en el uso del suelo y la vegetación. En G. Halffter, S. Guevara y A. Melic (Eds.), *Hacia una cultura de conservación de la diversidad biológica*. Sociedad Entomológica Aragonesa. <http://sea-entomologia.org/PDF/PDFSM3MVOL6/Pdf18161172018SanchezCordero.pdf>
- Sánchez-Gervacio, B.M., Legorreta-Soberanis, J., Bedolla-Solano, R., Rosas-Acevedo, J.L., Valencia-Quintana, R., Juárez-López, A.L. y Paredes-Solís, S. (2021). Impact of a non-formal environmental education program on safe handling of pesticides among Mexican subsistence farmers: a participatory pilot study. *Human and Ecological Risk Assessment: An International Journal*, 27(6), 1636-1654. <https://doi.org/10.1080/10807039.2020.1868285>
- Schneeweiss, A., Schreiner, V.C., Reemtsma, T., Liess, M. y Schäfer, R. (2022). Potential propagation of agricultural pesticide exposure and effects to upstream sections in a biosphere reserve. *Science of The Total Environment*, 836. <https://doi.org/10.1016/j.scitotenv.2022.155688>
- Sinchire, R., Cayambe, J. y Heredia-R., M. (2023). Conocimiento, percepción y prácticas de los agricultores sobre la aplicación de plaguicidas: un estudio de caso de productores de arroz en Ecuador. *Revista Tecnológica-ESPOL*, 35(1), 88-103. <http://www.rte.espol.edu.ec/index.php/tecnologica/article/view/1013>
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (s.f.). *What are biosphere reserves? Man and the Biosphere Programme (MAB)*. <https://www.unesco.org/en/mab/wnbr/about>
- Vásquez, C., Santana, R., Velastegui, G., Telenchana, N., Villa-Murillo, A. y Colmenarez, Y. (2025). Percepción y conocimiento de los agricultores sobre el manejo sostenible de plagas en una comunidad indígena, Salasaka, Ecuador. *Biotecnia*, 27. <https://doi.org/10.18633/biotecnia.v27.2549>
- Vitousek, P.M., D'Antonio, C.M., Loope, L.L. y Westbrooks, R. (1996). Biological invasions as global environmental change. *American Scientist*, 84(5), 218-228. https://www.researchgate.net/publication/43253574_Biological_Invasions_as_Global_Environmental_Change

Moléculas de origen natural con actividad antimicrobiana acopladas a empaques activos para la preservación de alimentos

Molecules of natural origin with antimicrobial activity coupled with active packaging for food preservation

Pedro Jesús Barrón Uribe 

José Antonio Cervantes Chávez* 

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México

*joseantonio.cervantes@uaq.mx

DOI: [10.61820/dcqua.2395-8847.1779](https://doi.org/10.61820/dcqua.2395-8847.1779)

Fecha de recepción: 3 de diciembre del 2024

Fecha de aceptación: 3 de noviembre del 2025

Resumen

A través del tiempo se han creado diversas técnicas y tecnologías en la industria alimentaria para retrasar la descomposición de los alimentos; entre estas, los empaques buscan proteger el alimento y prolongar su vida útil a partir de los materiales que los componen. Si bien los empaques actuales cubren necesidades básicas de protección, hoy en día existe una gran pérdida económica y alimenticia debido a la rápida descomposición de los alimentos que contienen. Asimismo, ha habido un alza en la demanda por alimentos frescos con menos compuestos sintéticos y por la disminución de los residuos generados. Como respuesta a esta problemática se crearon los empaques activos, capaces de mantener el alimento inocuo por un largo periodo sin requerir la adición de conservadores sintéticos, ya que sus materiales retrasan el proceso de descomposición mediante compuestos de origen natural. Estas moléculas inhiben el desarrollo de microorganismos patógenos humanos transmitidos por alimentos, reduciendo la incidencia de enfermedades causadas por dichos agentes. La tasa de efectividad del empaque depende de su tipo, las moléculas utilizadas y las características del alimento. En ese sentido, la presente revisión explora el efecto antimicrobiano de distintas fuentes naturales implementadas en esta tecnología (antioxidantes, aceites esenciales, antimicrobianos provenientes de origen



animal, entre otros), así como su efectividad según el tipo de empaque y el material empleados.

Palabras clave: componentes antimicrobianos, empaques activos, natural, preservación de alimentos, seguridad alimenticia

Abstract

In order to prevent food spoilage, a great number of techniques and technologies have been developed over time in the food industry. Among these, packaging aims to protect food and extend its shelf life based on the containers' materials. Nonetheless, fulfilling basic protection needs is irrelevant given the significant economic and nutritional loss due to the rapid food spoilage caused by the current packaging. Additionally, there is a growing demand both for fresh food with fewer synthetic compounds, and less waste generation. Such concerns led to the creation of active packaging, which can keep food safe for a long period without the need for synthetic compounds. Its materials slow the spoilage process through naturally occurring compounds, which inhibit the growth of foodborne pathogens, thus reducing the incidence of illnesses caused by them. Its effectiveness rate is determined by the food characteristics, type of packaging, and molecules used. Therefore, this review explores the antimicrobial effect of various natural sources implemented in this technology (antioxidants, essential oils, and antimicrobial of animal origin) and their effectiveness according to the material and type of packaging.

Keywords: active packaging, antimicrobial compounds, food preservation, food safety, natural

Introducción

En la industria alimentaria, los empaques son elementos valiosos para la preservación de alimentos debido a que los protegen contra contaminantes físicos, químicos y biológicos. No obstante, si bien aseguran que el producto permanezca inocuo al servir como una barrera entre este, el entorno y el ambiente (Yildirim et al., 2017), es posible que el alimento se contamine durante el proceso de empaque o de forma previa, por ejemplo, en su cultivo o procesamiento (Malhotra et al., 2015).

Cuando un alimento se contamina con un agente biológico, el proceso de su descomposición suele acelerarse (Batiha et al., 2021). Este fenómeno natural no solo ocasiona que el alimento pierda sus características nutrimentales y organolépticas, sino que además se desarrollen microorganismos (MO) que pueden ser deterioradores y, de mayor alarma, aquellos patógenos para el humano. Se ha comprobado que es posible retrasar la descomposición de alimentos a través de técnicas como

la fermentación, la salazón, el congelamiento y la pasteurización, mas estos no aseguran que el alimento no se vuelva a contaminar o que conserve en su totalidad sus características nutrimentales y organolépticas y, principalmente, su inocuidad (Malhotra *et al.*, 2015). Por estas razones, se ha buscado que los empaques mantengan por completo la calidad y seguridad del producto, aun si este estuvo expuesto a algún contaminante antes o después del envasado.

Se ha descubierto, por otra parte, que una gran cantidad de alimento se pierde en fases previas a la venta (Fernández-León *et al.*, 2018) y se desperdicia en el hogar (Procuraduría Federal del Consumidor [PROFECO], 2022). De acuerdo con la PROFECO (2022), en México se desperdician alrededor de 38 toneladas de alimento por minuto (el equivalente a un tercio de la producción) debido a factores relacionados con su deterioro, la confusión en torno al etiquetado (fecha de caducidad y consumo preferente), entre otras situaciones. Aunado a esto, la seguridad alimentaria es una prioridad ante el aumento de casos de enfermedades transmitidas por alimentos (ETA) a causa de MO patógenos; en particular, durante 2022, en el país se registraron más de tres millones de casos de infecciones intestinales, con un número mayor de 23 mil por intoxicación alimentaria bacteriana (Instituto Nacional de las Personas Adultas Mayores [INAPAM], 2023).

En la actualidad, los polímeros sintéticos no biodegradables derivados del plástico son los más populares debido a su utilidad para fabricar distintos tipos de empaques (Deshmukh y Gaikwad, 2022); sin embargo, se ha buscado incrementar el empleo de empaques activos e inteligentes con el fin de reducir la pérdida, el desperdicio y el uso desmedido de materia. Los empaques activos aseguran la inocuidad del alimento al interactuar con este y el entorno, mientras que los empaques inteligentes comunican al consumidor la calidad del producto (Caicedo-Perea *et al.*, 2022).

Los empaques activos transforman las condiciones del alimento y el entorno (por ejemplo, controlan la atmósfera interna o liberan sustancias) para prolongar la vida de anaquel y conservar la inocuidad del producto. Asimismo, buscan mejorar y extender sus cuatro funciones básicas (Fernández-León *et al.*, 2018):

- Contención: ofrecer un mejor manejo y transporte.
- Protección: evitar cualquier tipo de contaminación o alteración.

- Comunicación: informar en el envase sobre su contenido al consumidor.
- Comodidad: asegurar que el consumidor tenga el alimento a su conveniencia y disponibilidad.

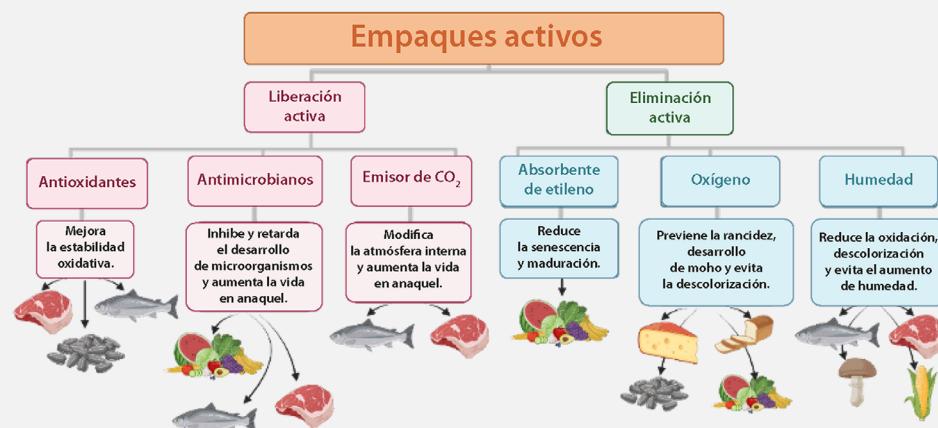
De acuerdo con Yildirim *et al.* (2017), los empaques activos se dividen en:

- Sistemas de eliminación activa: remueven compuestos no deseados ya sea del alimento o del entorno mismo, como oxígeno, etileno, humedad, olor, entre otros.
- Sistemas de liberación activa: adicionan compuestos al entorno o al alimento, como compuestos antimicrobianos, antioxidantes, dióxido de carbono, entre otros.

Dentro de las dos categorías anteriores, existe una amplia gama de sistemas (Figura 1). En este trabajo nos enfocaremos en el uso de compuestos antimicrobianos en sistemas de liberación por su capacidad de inhibir, reducir y retardar el desarrollo de MO patógenos presentes en alimentos a través de distintos mecanismos (Figura 2). Estos envoltorios pueden fabricarse a partir de polímeros biodegradables a base de polisacáridos, proteínas o lípidos (Deshmukh y Gaikwad, 2022). Los agentes activos se obtienen de diversos microorganismos, plantas y animales, y se adicionan por medio de tapetes, sobres o películas embebidos en un polímero comestible, entre otros métodos (Wyrwa y Barska, 2017).

Figura 1.

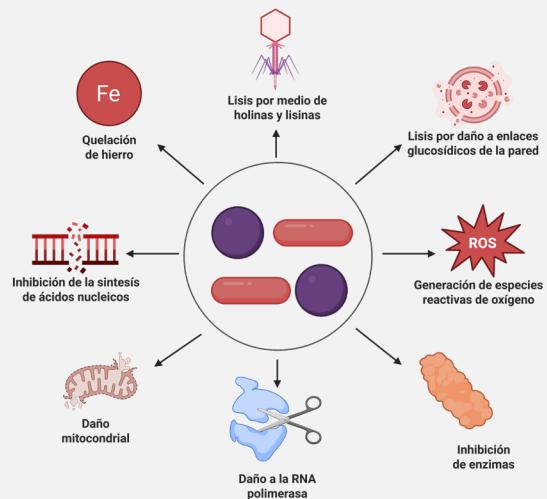
Clasificación de empaques activos



Fuente: elaboración propia con datos de Yildirim *et al.* (2017)
y realizada con BioRender.com

Figura 2.

Mecanismos antimicrobianos provenientes de compuestos naturales



Fuente: elaboración propia con datos de Deshmukh y Gaikwad (2022) y realizada con BioRender.com

Antimicrobianos procedentes de plantas

En tiempos recientes se ha buscado minimizar el uso de sustancias sintéticas antimicrobianas en los alimentos y sustituirlas por compuestos naturales (Pisoschi *et al.*, 2018), ya que se ha demostrado que las moléculas sintéticas pueden causar daños severos a la salud del consumidor y al medio ambiente (Mirza *et al.*, 2017). De acuerdo con Batiha *et al.* (2021), ciertos compuestos provenientes de fuentes naturales son capaces de inhibir el desarrollo de microorganismos patógenos, retrasar el periodo de descomposición e inclusive mejorar características de los alimentos.

Los fitoquímicos son compuestos químicos procedentes de las plantas que desempeñan diversas funciones dentro de estas, ya sea en forma de hormonas que ayudan a su desarrollo y reproducción o como defensa contra sus depredadores (Huang *et al.*, 2016). Esta clase de compuestos, con actividades antioxidantes, antidepresivas, neuroprotectoras y antimicrobianas, se producen tras la metabolización de polisacáridos, ácidos y azúcares (Siddiqui *et al.*, 2023). Sus características no solo aumentan el tiempo de vida en anaquel del producto en cuestión, sino que también ofrecen beneficios para el consumidor.

Aceites esenciales

Los aceites esenciales (AE) son metabolitos secundarios sintetizados por plantas aromáticas. Suelen utilizarse en industrias como la farmacéutica, cosmética y alimenticia, debido a su

capacidad antimicrobiana y antifúngica (Deshmukh y Gaikwad, 2022) por la presencia de compuestos como fenoles, ésteres, terpenoides, terpenos, aldehídos y lactonas (Carpena *et al.*, 2021). Su eficacia depende del área de recolección, la forma de extracción y las propiedades químicas del órgano de la planta de la que se extraen, así como de las propiedades fisicoquímicas del material al que se aplican (Deshmukh y Gaikwad, 2022; Yildirim *et al.*, 2017). Los AE pueden adicionarse a los empaques activos o directamente al alimento a través de capas o películas comestibles (Carpena *et al.*, 2021), y una de las ventajas que ofrecen sobre otros compuestos es que son más aceptados entre los consumidores por el alza en la preferencia por los productos orgánicos, ya que se perciben como más seguros (Irkin y Esmer, 2015).

Irkin y Esmer (2015) mencionan que los AE del ajo, cebolla, canela, laurel, orégano, menta, comino, entre otros, han demostrado poseer actividad antimicrobiana. Asimismo, una gran cantidad de estudios han puesto a prueba la efectividad de esta clase de compuestos frente a diversos microorganismos para prolongar la vida de anaquel de los alimentos. De acuerdo con Carpena *et al.* (2021), se ha logrado obtener un efecto antimicrobiano contra especies bacterianas patógenas como *Staphylococcus aureus*, *Listeria monocytogenes*, *Campylobacter jejuni*, *Salmonella enterica* y *Escherichia coli*.

Por otra parte, diversos estudios avalan la efectividad de los AE contra hongos, ya sea por su capacidad de inhibir la síntesis de la pared celular o de afectar las mitocondrias y generar especies reactivas de oxígeno (Nazzaro *et al.*, 2017). Por ejemplo, el AE obtenido del epicarpio del naranjo dulce causa la pérdida del citoplasma en las hifas e inhibe el desarrollo de *Aspergillus niger* (Nazzaro *et al.*, 2017). También se ha comprobado que el eneldo, comino, hinojo y anís producen daños significativos en *Candida spp.* al tener efecto sobre las mitocondrias (Vieira *et al.*, 2019).

A pesar de que poseen una alta eficacia, en ocasiones ciertos AE presentan un fuerte olor y sabor debido a su procedencia, pudiendo alterar las características organolépticas del alimento (Bedoya-Serna *et al.*, 2018); un claro ejemplo es el ajo, cuyo peculiar aroma resulta atractivo o repulsivo según el consumidor. Para evitar que este factor se convierta en un problema, se utilizan esencias industriales extremadamente útiles para enmascarar el olor sin interferir con la actividad antimicrobiana (Heras-Mozos *et al.*, 2019).

Polifenoles

Los polifenoles son compuestos naturales que se encuentran de forma abundante en flores, semillas, tallos, té, vegetales y frutas, por mencionar algunas fuentes (Deshmukh y Gaikwad, 2022). A este grupo pertenecen los flavonoides y no flavonoides, compuestos químicos con una estructura similar a la de los fenoles y cuya diferencia radica en su esqueleto y anillos aromáticos (Deshmukh y Gaikwad, 2022; Siddiqui *et al.*, 2023). En los últimos años ha habido un interés especial en estos agentes debido a que no solo son antioxidantes, sino que también funcionan como antimicrobianos al debilitar la estabilidad de la pared celular, alterar la membrana celular e interrumpir la unión de ciertas enzimas. Lamentablemente, aún no se comprenden a fondo estos procesos y, por ende, su efectividad contra los MO es relativamente desconocida (Siddiqui *et al.*, 2023; Tsuchiya, 2015).

Taninos

Los taninos son polifenoles solubles en agua procedentes de madera, tallos, hojas y semillas. Forman parte importante de la dieta de los animales y, pese a que su composición dificulta que los humanos los digieran, algunos alimentos de su dieta cuentan con ellos, como el vino y el té verde (Siddiqui *et al.*, 2023). Además de ser antioxidantes, los taninos presentan mecanismos antimicrobianos como la inhibición enzimática, la descomposición de la membrana celular a través del contacto con esta y ciertas proteínas, y la quelación de hierro. La efectividad de estos compuestos ha sido estudiada en *S. aureus*, *Vibrio* spp., *Salmonella typhimurium* y *E. coli* (Siddiqui *et al.*, 2023).

Antioxidantes

Los antioxidantes naturales (como los polifenoles o taninos) alargan la vida de aquellos de los alimentos al evitar que se oxiden; el proceso de oxidación ocurre cuando los ácidos grasos no saturados entran en contacto con algún catalizador (luz, hierro, calor, cobre, enzimas), lo que altera las propiedades del alimento (Deshmukh y Gaikwad, 2022; Lü *et al.*, 2010). Dichos cambios se atribuyen a los radicales libres, que surgen como consecuencia natural de la presencia de oxígeno, azufre y nitrógeno en un sistema biológico. Estas moléculas, clasificadas como especies reactivas de oxígeno, especies reactivas de azufre o especies reactivas de nitrógeno (ROS, RSS y RNS, por sus siglas en inglés), propician la degradación de proteínas y ácidos nucleicos, así como la formación de cetonas, aldehídos, hidroperóxidos y otros componentes. De tal forma, los antioxidantes previenen los efectos organolépticos de los radicales libres en el alimento.

Antimicrobianos de origen natural

Ciertas proteínas y enzimas de origen animal poseen actividad antimicrobiana pues son producidas como un mecanismo de defensa frente a depredadores (Batiha et al., 2021). La lactoferrina y la lisozima son ejemplos de estas sustancias, las cuales destruyen la membrana celular de bacterias Gram positivas (G+) y Gram negativas (G-) (Pisoschi et al., 2018).

Lactoferrina

La lactoferrina (LF) es una glicoproteína globular de una sola cadena polipeptídica compuesta entre 691 y 696 aminoácidos, con una masa molecular de 78 kDa (Niaz et al., 2019; Wang et al., 2019). Está presente en distintos fluidos biológicos, como el líquido seminal y la saliva, así como en superficies mucosas y dentro de algunos leucocitos polimorfonucleares, pero se encuentra en mayor concentración en leche de vaca y leche materna (Wang et al., 2019). La carga de la superficie de la LF es positiva (Wang et al., 2019), lo que le otorga una capacidad antimicrobiana, ya que al unir iones de hierro causa deficiencia de este (Jenssen y Hancock, 2009). Posee actividad contra bacterias, virus, hongos (Gyawali y Ibrahim, 2014; Niaz et al., 2019) y MO como *L. monocytogenes*, *E. coli*, *Klebsiella* y *Corynebacterium* (Gyawali y Ibrahim, 2014).

Lactoperoxidasa

Al igual que la lactoferrina, la lactoperoxidasa (LPS) es una enzima presente en la leche de vaca secretada por las células epiteliales de las glándulas mamarias (Deshmukh y Gaikwad, 2022). Si bien se encuentra también en la leche humana, su producción en esta es 20 veces menor en comparación con la cantidad encontrada en la de bovino (Batiha et al., 2021). Esta glicoproteína, con una masa molecular de 78 kDa, posee capacidad bacteriostática y bactericida contra bacterias G+ y G- (Al-Baarri et al., 2019). La actividad de la LPS se basa en un sistema de tres componentes: la enzima LPS, el tiocianato y el peróxido de hidrógeno (Al-Baarri et al., 2019). Una vez que la LPS cataliza el ion tiocianato (SCN^-), se genera ácido hipotiocianoso (HOSCN) e hipotiocianato (OSCN^-), y el OSCN^- oxida y altera los grupos sulfhidrilos (-SH) de las proteínas en la membrana citoplasmática bacteriana, con un efecto bactericida (Deshmukh y Gaikwad, 2022; Al-Baarri et al., 2019). Debido a esta capacidad, la LPS se ha empleado en diversos escenarios, por ejemplo, para evitar la descomposición o preservar productos cárnicos (Batiha et al., 2021), y se ha descubierto que su efecto puede incrementar si se utilizan en conjunto compuestos como el quitosano, la lisozima y los β -carotenos (Al-Baarri et al., 2019).

Lisozima

La lisozima, N-acetyl-murámico hidrolasa o muramidasa es una proteína monomérica presente en leche de mamíferos y huevos de aves; inclusive, se conoce que existe una gran cantidad de lisozimas en órganos y secreciones humanas, así como en plantas, bacterias y organismos vertebrados e invertebrados (Wu *et al.*, 2019). De acuerdo con la Food and Drug Administration (FDA, 1998), se le considera “generalmente reconocida como segura” (GRAS, por sus siglas en inglés: *Generally Recognized as Safe*). Estas proteínas han sido estudiadas debido a su capacidad para mantenerse estables en un rango extenso de temperaturas (4–95 °C) y de pH (2–10) (Batiha *et al.*, 2021; Wu *et al.*, 2019). Su actividad antimicrobiana se basa en dañar la pared celular al atacar su capa de peptidoglicano. Una vez hidrolizados los enlaces glucosídicos β (1→4) existentes entre el ácido N-acetyl-murámico y la N-acetyl-D-glucosamina, se provoca la lisis bacteriana (Aloui y Khwaldia, 2016; Yildirim *et al.*, 2017). Se ha demostrado que bacterias G+ como *Bacillus stearothermophilus*, *L. monocytogenes*, *Clostridium tyrobutyricum* y *Micrococcus* spp. (Batiha *et al.*, 2021) pueden ser inhibidas por la lisozima, ya que su pared celular está compuesta en mayor cantidad por peptidoglicano, a diferencia de las G-, que poseen menos (Deshmukh y Gaikwad, 2022), aunado a que la capa de lipopolisacárido limita el acceso al sitio de acción (Aloui y Khwaldia, 2016).

Antimicrobianos provenientes de microorganismos

Existen distintos MO que inhiben de forma natural el desarrollo de otros MO a través de componentes sintetizados por ellos mismos, y que son considerados GRAS (Batiha *et al.*, 2021). Entre estos, las bacterias ácido lácticas (BAL) son conocidas por producir compuestos antimicrobianos que inhiben el crecimiento y desarrollo de otras bacterias (Ramos *et al.*, 2020). Artículos presentados por Sadiq *et al.* (2019), Ramos *et al.* (2020), entre otros, han destacado el uso de este tipo de componentes, ya que pueden aprovecharse más allá de los empaques activos, por ejemplo, en alimentos perecederos como frutas y verduras, pues ofrecen protección y prevención contra el desarrollo de diversos MO (Batiha *et al.*, 2021).

Bacteriocinas

Las bacteriocinas son péptidos antimicrobianos (PAM) producidos mayormente por BAL, secretadas y que inhiben el desarrollo de bacterias (Irkin y Esmer, 2015). Su popularidad para la conservación de alimentos deriva de que no representan riesgo alguno contra la salud humana, pues son degradados por las enzimas proteolíticas que se encuentran en el tracto gastrointestinal hu-

mano, además de ser hipoalergénicas y termoestables (Irkin y Esmer, 2015). Los PAM suelen tener una carga neta catiónica y características anfipáticas (Cañaveral Sanchez *et al.*, 2020). La actividad de las bacteriocinas es versátil, ya que inhiben la síntesis de la pared celular al formar complejos con el lípido II y formar poros en la membrana, incrementar la producción de superóxido e inhibir la RNA polimerasa, así como despolarizar y permeabilizar la membrana; también pueden despolarizar la membrana mitocondrial y producir especies reactivas de oxígeno en parásitos (Huang *et al.*, 2021). Se ha observado que estos PAM actúan sobre MO como *L. monocytogenes*, *Bacillus cereus*, *S. aureus* y *Alicyclobacillus acidoterrestris* (Gumienna y Górná, 2021). Es posible categorizarlos a partir de diversas características, pero Aljohani *et al.* (2023) propusieron una clasificación de tres clases basadas en la masa molecular, dependiendo de si están modificadas postraduccionalmente, si poseen puentes disulfuro y si son termolábiles.

Nisin

Producida por *Lactococcus lactis*, la nisin es una bacteriocina presente en la leche, con una masa molecular de 3.4 kDa (Azhar *et al.*, 2017). Se trata de una proteína termoestable que ha demostrado poseer mayor actividad antimicrobiana contra bacterias G+ que G-, como *L. monocytogenes*, *Enterococcus*, *Micrococcus*, *Staphylococcus*, *Pediococcus*, entre otras (Batiha *et al.*, 2021). Su efecto antimicrobiano se produce cuando se une a paredes celulares específicas, lo que destruye la membrana citoplasmática y forma un poro por el cual es expulsado el contenido intracelular. Debido a su actividad, este péptido se utiliza en productos como comida enlatada, carne curada y pepinillos (Chan *et al.*, 2023).

Pediocina

Producida por *Pediococcus* spp., la pediocina es una bacteriocina termoestable (Niamah, 2018) con una masa molecular de 4.6 kDa y una carga neta positiva (Rodríguez *et al.*, 2002). Debido a su capacidad bactericida y bacteriostática contra bacterias G+, es uno de los péptidos antimicrobianos con mayores usos comerciales (Khorshidian *et al.*, 2021; Pilevar *et al.*, 2018). Su actividad bactericida es versátil, ya que forma agujeros en la membrana de la célula objetivo, inhibe la síntesis de ácidos nucleicos, cambia el potencial electrostático e inhibe diversas enzimas de la célula (Khorshidian *et al.*, 2021). Se ha observado que tiene efecto sobre *L. monocytogenes*, *Clostridium perfringens*, *B. cereus*, *Aeromonas hydrophila*, *Enterococcus faecalis* y *S. aureus* (Niamah, 2018). Ante los resultados de di-

versos estudios que han demostrado que *L. monocytogenes* posee una gran habilidad para adaptarse a temperaturas frías y a valores de pH mayores a 5, siendo el contaminante principal de los productos cárnicos a nivel global, la inclusión de pediocina en los empaques comerciales ha aumentado, ya que logra conservar su actividad a temperaturas de -80 °C y en un rango de pH de 2-10 (Khorshidian *et al.*, 2021; Niamah, 2018).

Reuterina

La reuterina es un antimicrobiano producido por algunas cepas de *Lactobacillus reuteri* que induce estrés oxidativo en las células objetivo (Bennett *et al.*, 2021). Características como la termoestabilidad, la resistencia a un amplio rango de pH, así como a enzimas lipolíticas y proteolíticas, además de una alta solubilidad en agua, convierten la reuterina en una molécula ideal para garantizar la calidad y seguridad de algunos alimentos (Gyawali y Ibrahim, 2014). Si bien actualmente no se conoce con certeza la forma en que actúa sobre las células objetivo, existen distintas explicaciones, como que el aldehído presente en la bacteriocina reacciona con el grupo -SH contenido en las moléculas esenciales de la célula objetivo, o que inhibe la síntesis de DNA y eso lleva a la muerte celular (Deshmukh y Gaikwad, 2022). Sin embargo, está bien documentada su efectividad contra *C. jejuni*, *E. coli*, *E. coli* O157:H7, *Yersinia enterocolitica*, *S. aureus* y *Salmonella choleraesuis* (Asare *et al.*, 2020; Batiha *et al.*, 2021).

Quitosano

El quitosano es un biopolímero poliacidónico no tóxico y biodegradable (Deshmukh y Gaikwad, 2022) procedente de los exoesqueletos de artrópodos (Gyawali y Ibrahim, 2014), aunque también puede obtenerse de hongos (Batiha *et al.*, 2021). Se trata de un polisacárido lineal compuesto por monómeros de N-acetyl-D-glucosamina unidos por enlaces β (1 \rightarrow 4) (Deshmukh y Gaikwad, 2022; Perinelli *et al.*, 2018). Su peso molecular determina la capacidad de su bioactividad, de modo que esta será más fuerte con un peso bajo (<20 kDa) que con uno alto (>120 kDa) (Kou *et al.*, 2021). La eficacia de este agente microbiano se atribuye al grupo amino que posee, el cual interactúa con la membrana celular del patógeno (con carga negativa) y provoca la lixiviación de elementos intracelulares y proteínas (Deshmukh y Gaikwad, 2022); no obstante, su aplicación como antimicrobiano en empaques activos puede verse limitada por su insolubilidad a pH básicos y neutros (Gyawali y Ibrahim, 2014). Se ha demostrado que el quitosano evita el desarrollo de bacterias y hongos, siendo más efectivo contra bacterias G+ como

S. aureus y *Staphylococcus saprophyticus*; sin embargo, se ha reportado que, al combinarse con AE, su espectro de inhibición aumenta contra bacterias G- como *Klebsiella pneumoniae*, *E. coli*, *Pseudomonas aeruginosa*, *Pseudomonas fluorescens*, *Shewanella putrefaciens*, *Shewanella baltica* y *Serratia* spp. (Flórez et al., 2022).

Bacteriófagos

Los bacteriófagos (fagos) son virus que infectan bacterias, la mayoría de los cuales pertenecen a la orden de los *Caudovirales* (Wagh et al., 2023). Al igual que las moléculas mencionadas, poseen una fuerte actividad antimicrobiana y representan una opción innovadora para la industria alimentaria por considerarse como GRAS, así como por ser efectivos contra bacterias G+ y G- asociadas a la descomposición de alimentos y las ETA (Narayanan et al., 2024). Los fagos se clasifican de acuerdo con su ciclo de vida, pudiendo ser virulentos o temperados (Wagh et al., 2023). El ciclo de vida de los virulentos es lítico y consiste en unirse a la superficie de la bacteria a infectar, inyectar su genoma y usar la maquinaria celular del anfitrión para crear nuevas partículas fágicas, tras lo cual, con la ayuda de proteínas, lisán la bacteria huésped y liberan la progenie (Grande, 2020). Existen dos proteínas ampliamente utilizadas por los fagos para destruir la pared celular: lisinas y holinas; las primeras destruyen la pared celular bacteriana, mientras que las segundas perforan el citoplasma bacteriano (Wagh et al., 2023). Por otra parte, estos MO requieren de una cantidad alta de viriones para ser efectivos (Wagh et al., 2023). Son estables a pH de 5-8 y, en bajas temperaturas, a pH de 4-10; sin embargo, son sensibles a la luz visible y la ultravioleta, que causan daños en el genoma (Grande, 2020). Los fagos han demostrado ser eficaces contra *L. monocytogenes*, *E. coli*, *Salmonella* spp., *Vibrio* spp., *Shigella* spp., *Bacillus* spp. y *Campylobacter* (Grande, 2020; Narayanan et al., 2024).

Nanotecnología

Un campo con un amplio rango de innovación en cuanto al diseño de materiales con actividad antimicrobiana es la nanotecnología, pues dentro de sus características se encuentra la capacidad de controlar y modificar materia y sistemas a escala nanométrica (Ojeda et al., 2019). De acuerdo con la Organización Internacional de Estandarización (ISO, 2015), las dimensiones que definen los rangos de nanoescala son de 1 a 100 nanómetros (nm), donde 1 nm equivale a 1×10^{-9} metros. Gracias a sus particularidades, es posible aplicar la nanotecnología de distintas formas, incluyendo en los empaques activos, ya que no

solo evita o retrasa el deterioro de alimento, sino que también puede mejorar las propiedades mecánicas, térmicas o de la tecnología de barreras con la que estos cuenten (Mahmud *et al.*, 2022).

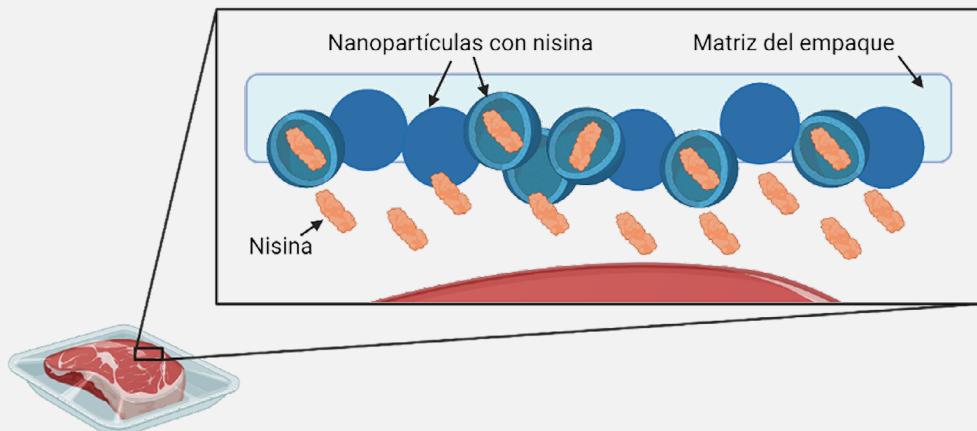
Nanopartículas y nanovesículas

Al utilizar nanotecnología y compuestos antimicrobianos naturales como agentes activos surgen problemas a raíz de factores como la matriz en la que serán empleados o la tecnología misma (Quinto *et al.*, 2019); no obstante, a pesar de las limitantes, se han obtenido resultados prometedores con su uso. Por ejemplo, se ha observado que las nanopartículas de pediocina y óxido de zinc inhiben el desarrollo de *S. aureus* y *L. monocytogenes* (Gumienna y Górná, 2021). Chatzidaki *et al.* (2019) reportaron actividad inhibitoria contra el desarrollo de *S. aureus*, *B. cereus*, *L. monocytogenes* y *L. lactis* mediante nanopartículas de nisin con AE de díctamo debido a su alto porcentaje de carvacrol y timol. Gomaa (2018) informó que las nanopartículas de plata sirven como adyuvante para las bacteriocinas y aumentan el efecto bactericida contra bacterias patógenas de humanos como *E. coli* y *P. aeruginosa*. Finalmente, Bahrami *et al.* (2019) encontraron que la nanoencapsulación de nisin en liposomas prolonga su liberación y aumenta la vida útil de los alimentos en anaquel; esta técnica no incrementa la actividad antimicrobiana de la nisin, sino que la prolonga, pues evita que se vea reducida al entrar en contacto directo con el alimento (Figura 3).

El uso de nanotecnología en empaques activos trae consigo oportunidades para evitar el deterioro alimenticio; sin embargo, se requieren más estudios que avalen la seguridad del consumidor frente a la comercialización de alimentos que hayan entrado en contacto con esta tecnología (Quinto *et al.*, 2019). Si bien se conoce que las nanopartículas orgánicas, como el quitosano, los lípidos y las proteínas, no originan efectos tóxicos en el consumidor, las nanopartículas de plata, nanoarcilla, entre otras, pueden ser citotóxicas luego de una exposición continua a largo plazo en grandes cantidades, sobre todo si no se encuentran unidas a una matriz polimérica adecuada capaz de retener las partículas para evitar que migre al alimento (Ashfaq *et al.*, 2022).

Figura 3.

Nanoencapsulación de nisina en liposomas



Fuente: elaboración propia con datos de Bahrami *et al.* (2019)
y realizada con BioRender.com

Aplicaciones

Los agentes antimicrobianos en los empaques activos no se limitan a prolongar la vida útil de los alimentos al inhibir el desarrollo de bacterias, hongos y levaduras, sino que también ayudan a reducir la contaminación entre los alimentos frescos y los procesados, así como a proteger los equipos donde se procesan los alimentos (por ejemplo, máquinas de envasado, guantes y cintas transportadoras) (Deshmukh y Gaikwad, 2022).

La elección del agente antimicrobiano dependerá de la composición, método de obtención, mecanismo de acción, forma de almacenamiento del producto, además de la tasa de desarrollo y condiciones fisiológicas de los MO relacionados con el alimento y el agente. Asimismo, debe considerarse que existen dos formas de adicionar los agentes: aplicándolos de forma directa al producto o incluyéndolos en los materiales con los que se fabrica el empaque (Deshmukh y Gaikwad, 2022; Siddiqui *et al.*, 2023). Si el agente se adiciona de forma directa, es posible que su actividad no sea del todo efectiva debido a su interacción con los componentes del producto. Por otro lado, adicionarlo de forma indirecta resuelve esa problemática, mas su eficacia ahora depende de que el empaque lo libere de forma constante y controlada, así como de su concentración; debe considerarse que una alta concentración puede alterar las características organolépticas y ocasionar que se degrade antes de tiempo (Siddiqui *et al.*, 2023).

El empaque y agente a utilizar dependerán del alimento. Por ejemplo, las frutas y verduras se descomponen y pierden sus características alimenticias rápidamente debido a que en

alguna parte del proceso (cultivo, transporte, empaque o procesamiento) pueden sufrir un daño que permita el desarrollo de MO como *E. coli* o *Erwinia*, o que durante el resguardo el método de conservación sea inadecuado y propicie el desarrollo de hongos o levaduras (Erdoḡrul y Şener, 2005; Pérez-Gago y Palou, 2016). Para este caso, se debe elegir una matriz que no entre en contacto directo con el alimento, junto con un agente que pueda ser liberado de forma constante y controlada, como algún compuesto fenólico, el cual no solo evitará el desarrollo de MO, sino que también retrasará el proceso de oxidación, aumentando así la vida en anaquel (Deshmukh y Gaikwad, 2022).

En cuanto a las proteínas de origen animal (carne/pescado), se trata de alimentos que se colonizan y descomponen de forma acelerada por la humedad alta y las grasas que poseen, lo cual da pie a la degradación de proteínas y la oxidación de lípidos, procesos que alteran la calidad del producto. En este caso, la opción sería utilizar una matriz que retenga el compuesto activo y lo libere de forma controlada, junto con una nisin nanoencapsulada en lugar de un compuesto fenólico (Bahrami et al., 2019; Deshmukh y Gaikwad, 2022).

Conclusión

La implementación de componentes antimicrobianos en empaques activos para la preservación de alimentos ofrece diversas ventajas sobre los componentes sintéticos empleados para alargar la vida de anaquel de los alimentos. Entre ellas se encuentra que su origen natural responde a la demanda del consumidor por productos con menos compuestos sintéticos, que el espectro antimicrobiano de los agentes es amplio y que es posible agregar características deseables al alimento a través de estos, como los antioxidantes extraídos de las plantas.

Los agentes revisados destacan por sus distintos mecanismos de acción, como el daño a las mitocondrias o a la pared celular, la interrupción del ciclo celular, la inactivación de enzimas y metabolitos vitales para las funciones celulares, entre otros. Asimismo, resaltan por su capacidad de extender la vida de anaquel de los alimentos sin alterar su composición nutrimental y organoléptica y, en caso de hacerlo, se puede utilizar algún aditivo natural o sintético para mitigar el problema, como ocurre con el AE de ajo, cuyo olor se enmascara, o bien, se dirige el producto a un mercado en específico para evitar que se continúe manipulando. También debe remarcarse que su adición no representa peligro alguno para el consumidor, además de que ofrecen que los productos no se descompongan en un corto tiempo y, en particular, que sean más accesibles.

A pesar de las bondades de los empaques activos, se requiere estudiar a fondo los agentes antimicrobianos para explotar de forma correcta todas sus propiedades, así como las matrices donde se implementen y las concentraciones que garanticen una mayor efectividad sin necesidad de aumentarlas de tal manera que degraden rápido el producto o cambien sus características. Finalmente, es prioritario realizar una valoración que dictamine si este tipo de empaques disminuye los niveles de desperdicio de alimentos y ETA, además del impacto de consumo en la población en general.

Referencias

- Al-Baarri, A.N., Damayanti, N.T., Legowo, A.M., Tekiner, İ.H. y Hayakawa, S. (2019). Enhanced antibacterial activity of lactoperoxidase-thiocyanate-hydrogen peroxide system in reduced-lactose milk whey. *International Journal of Food Science*, 2019(1). <https://doi.org/10.1155/2019/8013402>
- Aljohani, A.B., Al-Hejin, A.M. y Shori, A.B. (2023). Bacteriocins as promising antimicrobial peptides, definition, classification, and their potential applications in cheeses. *Food Science and Technology (Campinas)*, 43(5). <https://doi.org/10.1590/fst.118021>
- Aloui, H. y Khwaldia, K. (2016). Natural antimicrobial edible coatings for microbial safety and food quality enhancement. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety*, 15(6), 1080-1103. <https://doi.org/10.1111/1541-4337.12226>
- Asare, P.T., Zurfluh, K., Greppi, A., Lynch, D., Schwab, C., Stephan, R. y Lacroix, C. (2020). Reuterin demonstrates potent antimicrobial activity against a broad panel of human and poultry meat *Campylobacter* spp. isolates. *Microorganisms*, 8(1), 78. <https://doi.org/10.3390/microorganisms8010078>
- Ashfaq, A., Khursheed, N., Fatima, S., Anjum, Z. y Younis, K. (2022). Application of nanotechnology in food packaging: pros and cons. *Journal of Agriculture and Food Research*, 7, 100270. <https://doi.org/10.1016/j.jafr.2022.100270>
- Azhar, N.S., Zin, N.H.M. y Hamid, T.H.T.A. (2017). *Lactococcus Lactis* strain A5 producing nisin-like bacteriocin active against gram positive and negative bacteria. *Tropical Life Sciences Research*, 28(2), 107-118. <https://doi.org/10.21315/tlsr2017.28.2.8>
- Bahrami, A., Delshadi, R., Jafari, S.M. y Williams, L. (2019). Nanoencapsulated nisin: an engineered natural antimicrobial system for the food industry. *Trends in Food Science & Technology*, 94, 20-31. <https://doi.org/10.1016/j.tifs.2019.10.002>
- Batiha, G.E., Hussein, D.E., Algammal, A.M., George, T.T., Jeandet, P., Al-Snafi, A.E., Tiwari, A., Pamplona Pagnossa, J., Lima, C.M., Thorat,

- N.D., Zahoor, M., El-Esawi, M., Dey, A., Alghamdi, S., Hetta, H.F. y Cruz-Martins, N. (2021). Application of natural antimicrobials in food preservation: recent views. *Food Control*, 126, 108066. <https://doi.org/10.1016/j.foodcont.2021.108066>
- Bedoya-Serna, C.M., Dacanal, G.C., Fernandes, A.M. y Pinho, S.C. (2018). Antifungal activity of nanoemulsions encapsulating oregano (*Origanum vulgare*) essential oil: *in vitro* study and application in Minas Padrão cheese. *Brazilian Journal of Microbiology*, 49(4), 929-935. <https://doi.org/10.1016/j.bjm.2018.05.004>
- Bennett, S., Said, L.B., Lacasse, P., Malouin, F. y Fliss, I. (2021). Susceptibility to nisin, bactofencin, pediocin and reuterin of multidrug resistant *Staphylococcus aureus*, *Streptococcus dysgalactiae* and *Streptococcus uberis* causing bovine mastitis. *Antibiotics*, 10(11), 1418. <https://doi.org/10.3390/antibiotics10111418>
- Caicedo-Perea, C., Solís-Molina, M. y Jiménez-Rosero, H. (2022). Empaques inteligentes: definiciones, tipologías y aplicaciones. *Informador Técnico*, 86(2), 220-253. <https://doi.org/10.23850/22565035.3985>
- Cañaveral Sanchez, I., Chalarca Vélez, J.R. y Gaviria Arias, D. (2020). Bacteriocinas: visión básica y aplicada. *Alimentos, Ciencia e Ingeniería*, 27(2), 7-33. <https://revistas.uta.edu.ec/index.php/aci/article/view/938>
- Carpena, M., Nuñez-Estevez, B., Soria-Lopez, A., Garcia-Oliveira, P. y Prieto, M.A. (2021). Essential oils and their application on active packaging systems: a review. *Resources*, 10(1), 7. <https://doi.org/10.3390/resources10010007>
- Chan, K.T., Song, X., Shen, L., Liu, N., Zhou, X., Cheng, L. y Chen, J. (2023). Nisin and its application in oral diseases. *Journal of Functional Foods*, 105, 105559. <https://doi.org/10.1016/j.jff.2023.105559>
- Chatzidaki, M.D., Balkiza, F., Gad, E., Alexandraki, V., Avramiotis, S., Georgalaki, M., Papadimitriou, V., Tsakalidou, E., Papadimitriou, K. y Xenakis, A. (2019). Reverse micelles as nano-carriers of nisin against foodborne pathogens. Part II: the case of essential oils. *Food Chemistry*, 278, 415-423. <https://doi.org/10.1016/j.foodchem.2018.11.078>
- Deshmukh, R.K. y Gaikwad, K.K. (2022). Natural antimicrobial and antioxidant compounds for active food packaging applications. *Biomass Conversion and Biorefinery*, 14, 4419-4440. <https://doi.org/10.1007/s13399-022-02623-w>
- Erdoḡrul, Ö. y Şener, H. (2005). The contamination of various fruit and vegetable with *Enterobius vermicularis*, *Ascaris* eggs, *Entamoeba histolyca* cysts and *Giardia* cysts. *Food Control*, 16(6), 557-560. <https://doi.org/10.1016/j.foodcont.2004.06.016>
- Food and Drug Administration. (1998). Direct food substances affirmed as generally recognized as safe; egg white lysozyme. Fed-

- eral Register, 63(49), 12421-12426. <https://www.federalregister.gov/documents/1998/03/13/98-6571/direct-food-substances-affirmed-as-generally-recognized-as-safe-egg-white-lysozyme>
- Fernández-León, D.E., Hernández-Uribe, J.P., Campos-Montiel, R.G. y Jiménez-Alvarado, R. (2018). Empaques activos en la industria de los alimentos. *Boletín de Ciencias Agropecuarias del ICAP*, 4(8). <https://doi.org/10.29057/icap.v4i8.3341>
- Flórez, M., Guerra-Rodríguez, E., Cazón, P. y Vázquez, M. (2022). Chitosan for food packaging: recent advances in active and intelligent films. *Food Hydrocolloids*, 124, 107328. <https://doi.org/10.1016/j.foodhyd.2021.107328>
- Gomaa, E.Z. (2018). Synergistic antibacterial efficiency of bacteriocin and silver nanoparticles produced by probiotic *Lactobacillus paracasei* against multidrug resistant bacteria. *International Journal of Peptide Research and Therapeutics*, 25, 1113-1125. <https://doi.org/10.1007/s10989-018-9759-9>
- Grande, J. (2020). *Lab. Bioquímica/Bacteriófagos como agentes de Biocontrol en los alimentos. (TIP)*.
- Gumienna, M. y Górná, B. (2021). Antimicrobial food packaging with biodegradable polymers and bacteriocins. *Molecules*, 26(12), 3735. <https://doi.org/10.3390/molecules26123735>
- Gyawali, R. y Ibrahim, S.A. (2014). Natural products as antimicrobial agents. *Food Control*, 46, 412-429. <https://doi.org/10.1016/j.food-cont.2014.05.047>
- Heras-Mozos, R., Muriel-Galet, V., López-Carballo, G., Catalá, R., Hernández-Muñoz, P. y Gavara, R. (2019). Development and optimization of antifungal packaging for sliced pan loaf based on garlic as active agent and bread aroma as aroma corrector. *International Journal of Food Microbiology*, 290, 42-48. <https://doi.org/10.1016/j.ijfoodmicro.2018.09.024>
- Huang, F., Teng, K., Liu, Y., Cao, Y., Wang, T., Ma, C., Zhang, J. y Zhong, J. (2021). Bacteriocins: potential for human health. *Oxidative Medicine and Cellular Longevity*, 2021(1), 5518825. <https://doi.org/10.1155/2021/5518825>
- Huang, Y., Xiao, D., Burton-Freeman, B.M. y Edirisinghe, I. (2016). Chemical changes of bioactive phytochemicals during thermal processing. En *Reference Module in Food Science*. Elsevier. <https://doi.org/10.1016/b978-0-08-100596-5.03055-9>
- Instituto Nacional de las Personas Adultas Mayores. (31 de julio del 2023). *Las Enfermedades Transmitidas por Alimentos (ETA) tienen mayor riesgo de contraerlas las personas adultas mayores*. Gobierno de México. Recuperado el 2 de abril del 2024 en <https://www.gob.mx/inapam/es/articulos/las-enfermedades-transmitidas-por-alimentos-eta-tienen-mayor-riesgo-de-contraer->

las-las-personas-adultas-mayores#:~:text=De%20acuerdo%20con%20el%20Sistema,casos%20por%20intoxicaci%C3%B3n%20alimentaria%20bacteriana

Irkin, R. y Esmer, O.K. (2015). Novel food packaging systems with natural antimicrobial agents. *Journal of Food Science and Technology*, 52(10), 6095-6111. <https://doi.org/10.1007/s13197-015-1780-9>

International Organization for Standardization. (2015). ISO/TS 80004-2:2015. *Nanotechnologies–Vocabulary–Part 2: Nano-objects*. <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:ts:80004:-2:ed-1:v1:en>

Jenssen, H. y Hancock, R.E.W. (2009). Antimicrobial properties of lactoferrin. *Biochimie*, 91(1), 19-29. <https://doi.org/10.1016/j.biochi.2008.05.015>

Khorshidian, N., Khanniri, E., Mohammadi, M., Mortazavian, A.M. y Yousefi, M. (2021). Antibacterial activity of pediocin and pediocin-producing bacteria against *Listeria monocytogenes* in meat products. *Frontiers in Microbiology*, 12, 709959. <https://doi.org/10.3389/fmicb.2021.709959>

Kou, S., Peters, L.M. y Mucalo, M.R. (2021). Chitosan: a review of sources and preparation methods. *International Journal of Biological Macromolecules*, 169, 85-94. <https://doi.org/10.1016/j.ijbiomac.2020.12.005>

Lü, J.-M., Lin, P.H., Yao, Q. y Chen, C. (2010). Chemical and molecular mechanisms of antioxidants: experimental approaches and model systems. *Journal of Cellular and Molecular Medicine*, 14(4), 840-860. <https://doi.org/10.1111/j.1582-4934.2009.00897.x>

Mahmud, J., Sarmast, E., Shankar, S. y Lacroix, M. (2022). Advantages of nanotechnology developments in active food packaging. *Food Research International*, 154. <https://doi.org/10.1016/j.foodres.2022.111023>

Malhotra, B., Keshwani, A. y Kharkwal, H. (2015). Antimicrobial food packaging: potential and pitfalls. *Frontiers in Microbiology*, 6, 611. <https://doi.org/10.3389/fmicb.2015.00611>

Mirza, S.K., Asema, U.K. y Kasim, S.S. (2017). To study the harmful effects of food preservatives on human health. *Journal of Medicinal Chemistry Drug Discovery*, 2(2), 610-616.

Narayanan, K.B., Bhaskar, R. y Han, S.S. (2024). Bacteriophages: natural antimicrobial bioadditives for food preservation in active packaging. *International Journal of Biological Macromolecules*, 276, 133945. <https://doi.org/10.1016/j.ijbiomac.2024.133945>

Nazzaro, F., Fratianni, F., Coppola, R. y De Feo, V. (2017). Essential oils and antifungal activity. *Pharmaceuticals*, 10(4), 86. <https://doi.org/10.3390/ph10040086>

Niamah, A.K. (2018). Structure, mode of action and application of pediocin natural antimicrobial food preservative: a review. *Basrah Journal of Agricultural Sciences*, 31(1), 59-69. <https://doi.org/10.37077/25200860.2018.76>

- Niaz, B., Saeed, F., Ahmed, A., Imran, M., Maan, A.A., Khan, M. K. I., Tufail, T., Anjum, F.M., Hussain, S. y Suleria, H.A.R. (2019). Lactoferrin (LF): a natural antimicrobial protein. *International Journal of Food Properties*, 22(1), 1626-1641. <https://doi.org/10.1080/10942912.2019.1666137>
- Ojeda, G.A., Arias Gorman, A.M. y Sgrosso, S.C. (2019). Nanotecnología y su aplicación en alimentos. *Mundo Nano. Revista Interdisciplinaria en Nanociencia y Nanotecnología*, 12(23). <https://doi.org/10.22201/ceiich.24485691e.2019.23.67747>
- Pérez-Gago, M.B. y Palou, L. (2016). Antimicrobial packaging for fresh and fresh-cut fruits and vegetables. En S. Pareek (Ed.), *Fresh-cut fruits and vegetables. Technology, physiology, and safety* (pp. 403-452). CRC Press. <https://www.taylorfrancis.com/chapters/edit/10.1201/9781315370132-13/antimicrobial-packaging-fresh-fresh-cut-fruits-vegetables-mar%C3%A9rez-gago-llu%C3%ADa-palou>
- Perinelli, D.R., Fagioli, L., Campana, R., Lam, J.K.W., Baffone, W., Palmieri, G.F., Casettari, L. y Bonacucina, G. (2018). Chitosan-based nano-systems and their exploited antimicrobial activity. *European Journal of Pharmaceutical Sciences*, 117, 8-20. <https://doi.org/10.1016/j.ejps.2018.01.046>
- Pilevar, Z., Hosseini, H., Beikzadeh, S., Khanniri, E. y Alizadeh, A.M. (2018). Application of bacteriocins in meat and meat products: an update. *Current Nutrition & Food Science*, 16(2), 120-133. <https://doi.org/10.2174/1573401314666181001115605>
- Pisoschi, A.M., Pop, A., Georgescu, C., Turcuş, V., Olah, N.K. y Mathe, E. (2018). An overview of natural antimicrobials role in food. *European Journal of Medicinal Chemistry*, 143, 922-935. <https://doi.org/10.1016/j.ejmec.2017.11.095>
- Procuraduría Federal del Consumidor. (16 de junio del 2022). *Evita el desperdicio de alimentos*. Gobierno de México. Recuperado 2 de abril de 2024, de <https://www.gob.mx/profeco/documentos/evita-el-desperdicio-de-alimentos>
- Quinto, E.J., Caro, I., Villalobos-Delgado, L.H., Mateo, J., De-Mateo-Sileras, B. y Redondo-Del-Río, M.P. (2019). Food safety through natural antimicrobials. *Antibiotics*, 8(4), 208. <https://doi.org/10.3390/antibiotics8040208>
- Ramos, B., Brandão, T.R.S., Teixeira, P. y Silva, C.L.M. (2020). Biopreservation approaches to reduce *Listeria monocytogenes* in fresh vegetables. *Food Microbiology*, 85, 103282. <https://doi.org/10.1016/j.fm.2019.103282>
- Rodríguez, J.M., Martínez, M.I. y Kok, J. (2002). Pediocin PA-1, a wide-spectrum bacteriocin from lactic acid bacteria. *Critical Reviews in Food Science and Nutrition*, 42(2), 91-121. <https://doi.org/10.1080/10408690290825475>

- Sadiq, F.A., Yan, B., Tian, F., Zhao, J., Zhang, H. y Chen, W. (2019). Lactic acid bacteria as antifungal and anti-mycotoxicogenic agents: a comprehensive review. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety*, 18(5), 1403-1436. <https://doi.org/10.1111/1541-4337.12481>
- Siddiqui, S.A., Khan, S., Mehdizadeh, M., Bahmid, N.A., Adli, D.N., Walker, T.R., Perestrelo, R. y Câmara, J.S. (2023). Phytochemicals and bioactive constituents in food packaging-A systematic review. *Heliyon*, 9(11), e21196. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e21196>
- Tsuchiya, H. (2015). Membrane interactions of phytochemicals as their molecular mechanism applicable to the discovery of drug leads from plants. *Molecules*, 20(10), 18923-18966. <https://doi.org/10.3390/molecules201018923>
- Vieira, J.N., Gonçalves, C.L., Villarreal, J.P.V., Gonçalves, V.M., Lund, R.G., Freitag, R.A., Silva, A.F. y Nascente, P.S. (2019). Chemical composition of essential oils from the apiaceae family, cytotoxicity, and their antifungal activity *in vitro* against candida species from oral cavity. *Brazilian Journal of Biology*, 79(3), 432-437. <https://doi.org/10.1590/1519-6984.182206>
- Wagh, R.V., Priyadarshi, R. y Rhim, J.-W. (2023). Novel bacteriophage-based food packaging: an innovative food safety approach. *Coatings*, 13(3), 609. <https://doi.org/10.3390/coatings13030609>
- Wang, B., Timilsena, Y.P., Blanch, E. y Adhikari, B. (2019). Lactoferrin: structure, function, denaturation and digestion. *Critical Reviews in Food Science and Nutrition*, 59(4), 580-596. <https://doi.org/10.1080/10408398.2017.1381583>
- Wu, T., Jiang, Q., Wu, D., Hu, Y., Chen, S., Ding, T., Ye, X., Liu, D. y Chen, J. (2019). What is new in lysozyme research and its application in food industry? A review. *Food Chemistry*, 274, 698-709. <https://doi.org/10.1016/j.foodchem.2018.09.017>
- Wyrwa, J. y Barska, A. (2017). Innovations in the food packaging market: active packaging. *European Food Research and Technology*, 243, 1681-1692. <https://doi.org/10.1007/s00217-017-2878-2>
- Yildirim, S., Röcker, B., Pettersen, M.K., Nilsen-Nygaard, J., Ayhan, Z., Rutkaite, R., Radusin, T., Suminska, P., Marcos, B. y Coma, V. (2017). Active packaging applications for food. *Comprehensive Reviews in Food Science and Food Safety*, 17(1), 165-199. <https://doi.org/10.1111/1541-4337.12322>

Obtención de coeficientes de presión en edificios altos por dinámica de fluidos computacional (CFD)

*Obtaining pressure coefficients
in tall buildings using computational
fluid dynamics (CFD)*

Citlali Villalobos García 

Enrique Rico García* 

Luis Francisco Pérez Moreno 

Iván Fermín Arjona Catzim 

Universidad Autónoma de Querétaro, Querétaro, México

*ricog@uaq.mx

DOI: [10.61820/dcua.2395-8847.1973](https://doi.org/10.61820/dcua.2395-8847.1973)

Fecha de recepción: 16 de junio del 2025

Fecha de aceptación: 11 de noviembre del 2025

Resumen

En la actualidad, la dinámica de fluidos computacional (CFD) es una herramienta útil que forma parte de la industria en general. Se emplea para el mantenimiento, diseño, uso y análisis de equipos o estructuras que están en contacto con algún fluido, como es el caso del viento en los edificios altos. Además, fomenta la innovación en la ingeniería con la ayuda de simuladores que facilitan el estudio del comportamiento de los flujos. Esta investigación se realizó con la finalidad de evaluar la precisión de las simulaciones CFD con respecto a estudios experimentales, tales como pruebas en túneles de viento y a escala real. Los datos utilizados para este análisis proceden de Kikuchi et al. (2024), quienes tomaron muestras de las presiones del viento sobre las caras de un edificio alto. Con base en ello, se diseñó un modelo mediante simulaciones en CFD y los resultados se compararon con los obtenidos experimentalmente. Se encontró que el mallado polyhexacore reduce el costo computacional y alcanza un 92% de precisión en comparación con lo que establecen los estudios experimentales, por lo que constituye un instrumento eficiente para el análisis del viento en edificios.

Palabras clave: Ansys Fluent, CFD, coeficientes de presión, efectos del viento, estudios experimentales, rugosidad del terreno



Abstract

Computational fluid dynamics (CFD) is a useful tool that is currently integrated into the industry at large. It is used for maintaining, designing, operating, and analyzing equipment or structures in contact with fluids, such as wind impacting tall buildings. Additionally, it encourages engineering innovation through simulators that help studying flow behavior. This work was conducted to assess the accuracy of CFD simulations compared to experimental studies, such as wind tunnel tests and full-scale studies. Based on data from a study by Kikuchi et al. (2024), where wind pressure samples were taken from the surfaces of a tall building, a model was created using CFD simulations, and the results were contrasted with the experimental data. The findings show that polyhexacore meshing reduces computational costs and attains 92% accuracy relative to experimental studies, which signals its efficiency in wind assessments in buildings.

Keywords: Ansys Fluent, CFD, experimental studies, pressure coefficients, terrain roughness, wind effects

Introducción

La dinámica de fluidos computacional (CFD, por sus siglas en inglés) es una rama de la mecánica de fluidos basada en el análisis del comportamiento de los flujos mediante simulaciones realizadas en computadoras (Versteeg y Malalasekera, 2007). Está directamente relacionada con diversas disciplinas: las ciencias computacionales, al utilizar software y programación para analizar el comportamiento de un fluido en movimiento a través del tiempo y el espacio; con las matemáticas, mediante ecuaciones asociadas con las leyes de la conservación de masa, *momentum* (movimiento) y energía del fluido; con modelos matemáticos para el proceso de discretización; y con la ingeniería dedicada a la mecánica de fluidos (Fernández Oro, 2012).

Hoy en día, las simulaciones con CFD se utilizan en varias industrias para analizar el comportamiento de un fluido, además de que son útiles en el diseño de aparatos o estructuras, lo que influye en la innovación y evolución de la tecnología en la ingeniería (Fernández Oro, 2012).

El CFD está basado en la resolución de ecuaciones de Navier-Stokes mediante procedimientos numéricos discretos. Entre los modelos matemáticos aplicados se encuentran el método de volumen finito, que divide el dominio en volúmenes discretos y conserva las cantidades físicas en cada uno; el de diferencias finitas, que aproxima las derivadas mediante diferencias entre valores en puntos de una malla; y el de elementos finitos.

Estos modelos funcionan con base en el análisis de ecuaciones diferenciales que permiten crear un mallado cuyos nodos unen cada elemento a través de un medio continuo. Se conoce como discretización al proceso de transición de un medio continuo a un medio finito utilizando elementos geométricos (Xamán y Gijón-Rivera, 2016).

Debido a los avances tecnológicos, ahora es posible realizar análisis mediante simulaciones de flujos por CFD en lugar de recurrir a costosos estudios experimentales. Asimismo, la falta de laboratorios de aerodinámica con túneles de viento –alrededor de 34 en todo el mundo– ocasiona que este tipo de ensayos experimentales sean poco factibles (Cruz Gavilán *et al.*, 2020; Khalil y Lakkis, 2023).

Las simulaciones CFD presentan alta complejidad al intentar predecir las acciones o comportamientos reales del viento, ya que exponen situaciones desde el punto de vista de la aerodinámica urbana (Baghaei Daemei *et al.*, 2019). Se han realizado estudios que comparan los resultados por medio de CFD y los obtenidos por medio de túneles de viento, en los que la respuesta de la simulación ha sido satisfactoria cuando se replica el comportamiento turbulento del flujo. La desventaja de los estudios de túneles de viento es que los instrumentos utilizados deben estar perfectamente calibrados, sin que exista algún tipo de desviación instrumental; de lo contrario, esto generaría un margen de error y no se obtendrían datos precisos sobre las acciones del viento (Samaniego *et al.*, 2021). Si bien el CFD requiere un alto conocimiento del comportamiento del flujo mediante modelos matemáticos, puede aproximarse a su turbulencia real.

Baghaei Daemei *et al.* (2019) analizaron el comportamiento de diversos edificios según su forma, enfocándose en el efecto del arrastre aerodinámico en zonas urbanas y cómo varía la velocidad del viento por niveles. Se llevaron a cabo siete simulaciones en condiciones comparables y se incorporó un coeficiente de arrastre que dependía de la forma del edificio. Las simulaciones se realizaron mediante CFD, donde los resultados dependían de la forma de los edificios, y se determinó que fueran mediante Flow Design y Ansys Fluent, que solo generaban un 6% de margen de error en comparación con pruebas experimentales. Esto permite verificar los métodos tradicionales de diseño de edificios frente al viento.

Los resultados obtenidos por medio de las simulaciones CFD también dependen de la geometría del objeto en estudio, así como de la definición, forma y tamaño del mallado. En la

Tabla 1, se muestran algunas de las investigaciones que toman en cuenta diferentes formas, tamaños y condiciones de la zona, tanto ambientales como topográficas.

Tabla 1.

Datos recolectados a través del estado del arte

Título	Comentario	Referencia
Simulación CFD de coeficientes de presión inducidos por el viento en edificios con y sin balcones: validación y análisis de sensibilidad.	Los balcones reducen notablemente el impacto del viento en las caras de los edificios.	Montazeri y Blocken (2013)
Comparación de coeficientes de presión del viento entre experimentos en túnel de viento y mediciones a escala real utilizando datos operativos de un edificio urbano de gran altura.	Los resultados difieren por factores como las adecuaciones en la escala de la zona y en las propiedades del flujo.	Kikuchi <i>et al.</i> (2024)
Estimación experimental de los coeficientes de carga del viento para tornados: una perspectiva alternativa.	Las altas turbulencias complican el análisis y limitan al CFD cuando se intenta replicar tornados.	Haan <i>et al.</i> (2024)
Coeficientes de presión externa en un edificio de gran altura atípico: simulación informática y mediciones en un túnel de viento.	Considera la energía cinética y turbulencia, con un error < 5% en condiciones lisas. La rugosidad del terreno juega un papel importante en CFD, al igual que en los túneles de viento.	Hubova <i>et al.</i> , (2017)
Impacto de un edificio de gran altura sobre la presión del viento que actúa sobre los edificios de poca altura circundantes.	Se simularon remolinos. Destaca la importancia de considerar edificios adyacentes.	Ishida <i>et al.</i> (2024)
Una revisión técnica de las aplicaciones de la dinámica de fluidos computacional (CFD) en el diseño eólico de edificios y estructuras altas: pasado, presente y futuro.	Destaca la importancia de considerar los perfiles de velocidad del viento, la intensidad de la turbulencia, debido a la influencia de la presión media, y la desviación estándar.	Wijesooriya <i>et al.</i> (2023)

Fuente: elaboración propia

La intención del presente trabajo es evaluar si las simulaciones por CFD pueden emplearse como herramientas complementarias para obtener coeficientes de presión que contribuyan de forma efectiva al diseño por viento en edificios. Para ello, se compararon los resultados obtenidos por CFD con los datos procedentes de estudios experimentales.

El interés de obtener coeficientes de presión cercanos a los que se observan en realidad radica en que se utilizan en el análisis de diseño por viento de estructuras para determinar las presiones ejercidas sobre las caras de un edificio. Se define el coeficiente de presión como la relación entre la presión en un punto y la presión dinámica del flujo libre, a una altura de referencia respecto al suelo.

Materiales y métodos

La metodología general para realizar las simulaciones CFD se describe en la Figura 1.

Figura 1.

Metodología general del CFD



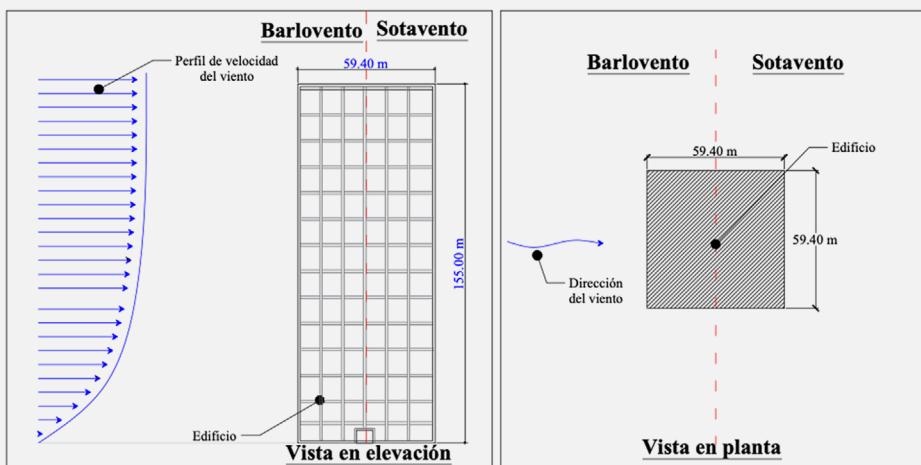
Fuente: basado en Xamán y Gijón-Rivera (2016)

Datos generales

Los datos generales para llevar a cabo este estudio se establecieron en *Kikuchi et al. (2024)*, donde se tomaron 129 puntos en las cuatro caras de un edificio. A partir de los datos obtenidos, se elaboró un modelo mediante CFD en Ansys Fluent Student. Las medidas del edificio son: 59.4 m por 59.4 m de cada lado, con una altura de 155 m (Figura 2), ubicado en zona urbana, según el plano del proyecto PLATEAU publicado por el Ministerio de Tierra, Infraestructura, Transporte y Turismo en Japón.

Figura 2.

Dirección del flujo y dimensiones geométricas
del elemento de estudio



Fuente: Kikuchi et al. (2024)

El viento no se desplaza de manera lineal; en realidad, presenta una forma hiperbólica que, en otras ocasiones, ha sido objeto de estudio por la complejidad de su comportamiento. Este fenómeno se conoce como capa límite, una característica que aparece en todo fluido viscoso. La capa límite se desarrolla sobre una zona sólida y genera fricción con el fluido al no ser una superficie deslizante. Esto provoca que la velocidad del fluido, y en este caso del viento, varíe de cero a la velocidad máxima, alcanzada cuando el flujo se vuelve estable y no presenta perturbaciones (White, 2010).

El perfil de velocidad del viento se obtuvo por medio de la fórmula de Archibald, emitida por World Meteorological Organization (WMO) en 1960 (Guevara Díaz, 2013):

$$V_z = V_{ref} \left(\frac{Z}{Z_{ref}} \right)^\alpha \quad (1)$$

donde V_z representa la velocidad del viento a estimar a una altura Z sobre el nivel del suelo (m); V_{ref} corresponde a la velocidad de referencia, es decir, la velocidad del viento observada a una altura preestablecida –denominada altura de referencia (Z_{ref})–, generalmente 10 m o 2 m, aunque puede ser otra; y α que equivale al exponente de rugosidad y varía entre 0.0 y 0.40 según el tipo de rugosidad del terreno (Tabla 2).

Tabla 2.

Valores del exponente de rugosidad

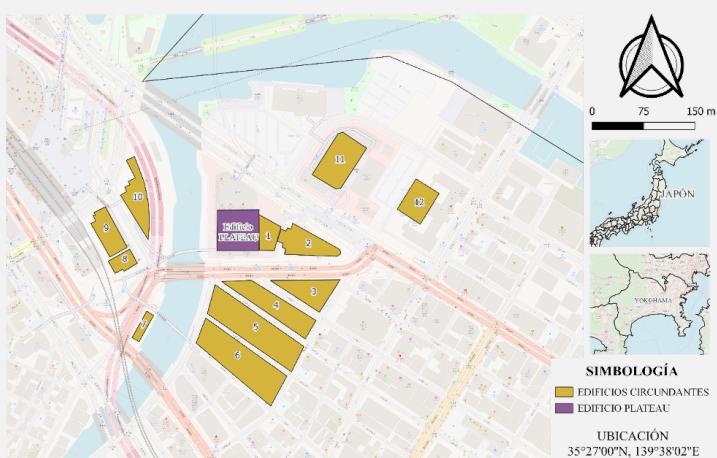
Zona	Valores
Agua	0.13
Césped	0.14 a 0.16
Cultivos y arbustos	0.20
Bosques	0.25
Zonas urbanas	0.40

Fuente: Guevara Díaz (2013)**Modelo de CFD**

El análisis se efectuó mediante el software Ansys Fluent Student, en el cual se definió la geometría del objeto de estudio, a partir del subprograma SpaceClaim, con las medidas previamente establecidas, de manera que se formó un objeto sólido. Para elaborar el modelado de la zona en la que se encuentra el edificio (ciudad de Yokohama, Japón), se investigó su ubicación exacta por medio de Google Earth y se obtuvieron las medidas aproximadas de los edificios aledaños. En la Figura 3, se muestra la distribución de los 12 edificios que influyen en el comportamiento y la distribución de las presiones sobre la cara del edificio (objeto de estudio).

Figura 3.

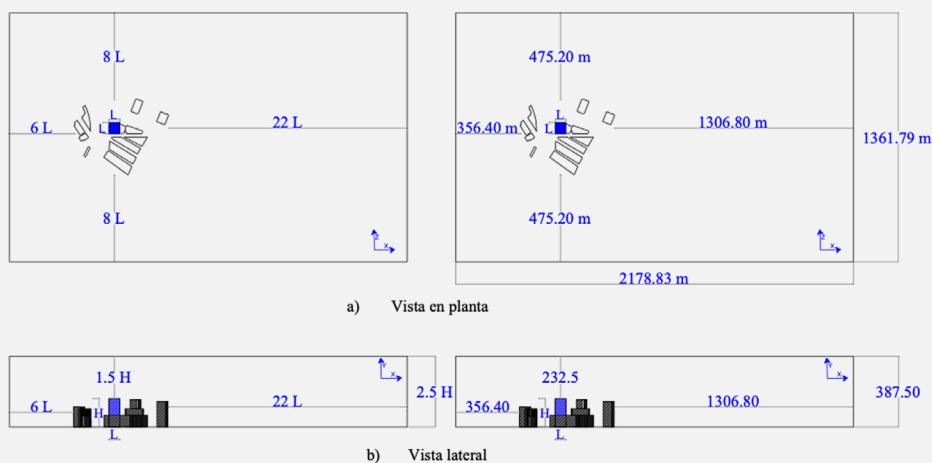
Distribución de edificios aledaños

**Fuente:** elaboración propia

Posteriormente, se elaboró la representación del dominio, la cual desempeña un papel importante en la simulación del desarrollo natural del flujo. Este se caracteriza por tener una geometría cúbica o rectangular prismática, cuyo tamaño se define en función de las dimensiones del objeto de estudio (Figura 4).

Figura 4.

Dimensiones del dominio: $H = 155$ m (altura del edificio); $L = 54.9$ m (secciones del edificio)

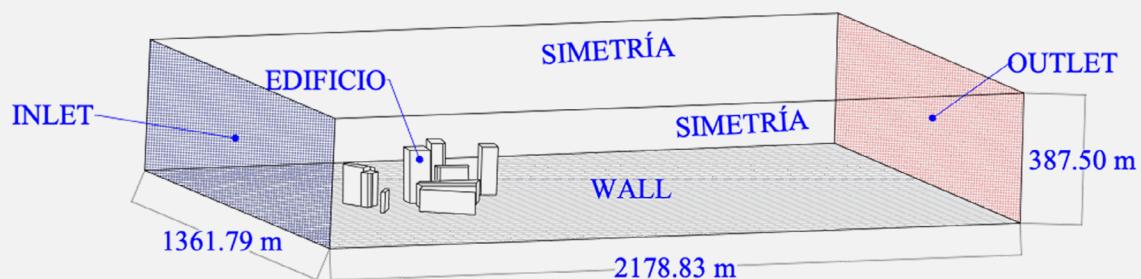


Fuente: modificado de Huang et al. (2007)

Asimismo, en el entorno donde se haría el análisis, se llevó a cabo la configuración inicial y las condiciones de frontera, se determinó la zona de entrada (*inlet*) y salida (*outlet*) del flujo, así como el objeto de estudio (Figura 5).

Figura 5.

Configuración del modelo



Fuente: elaboración propia

Durante esta etapa se estableció el mallado, uno de los procedimientos más importantes en el análisis mediante simulaciones.

Para este caso, se usaron dos tipos de mallas, con base en los parámetros expuestos en la Tabla 3, para evaluar la solución obtenida y verificar los resultados frente a los datos del estudio realizado por Kikuchi *et al.* (2024).

Tabla 3.

Parámetros para el mallado

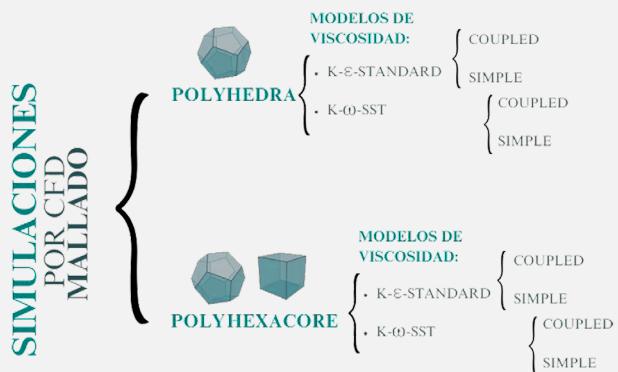
Malla	Tamaño de la cara	Regiones de refinamiento	Malla global	Calidad ortogonal
Polyhedra	1.5 m	7.75 m	12.2 m	0.45
Polyhexacore	1.1 m	3 m	10 m	0.46

En total, se realizaron 16 simulaciones para evaluar los dos tipos de malla. La principal diferencia es que *polyhedra*, al ser una malla no estructurada, se adapta mejor a bordes irregulares; mientras que *Polyhexacore* combina elementos de una malla estructurada con hexaedros –lo que disminuye el costo computacional al reducir el número de elementos sobre el dominio– y una malla no estructurada con *Polyhedros*, por lo que cumple con las características de adaptarse a las formas irregulares (Figura 6). En ambos casos se estableció una calidad ortogonal mayor a 0.4, considerada como buena (Fatchurrohman y Chia, 2017).

Para la selección del modelo de viscosidad se eligió el $k-\varepsilon$ -standard, debido a que es uno de los más utilizados por su simplicidad; además, se emplea para flujo turbulento y no requiere de un alto costo computacional. También se seleccionó el $k-\omega$ -SST, puesto que su desempeño se basa en la confiabilidad de perfiles aerodinámicos y en obtener datos precisos cercanos o sobre la pared (Ansys, 2024).

Figura 6.

Selección de la muestra



Fuente: elaboración propia

A continuación, se explicarán las ecuaciones aplicadas para calcular la intensidad de la turbulencia en cada una de las simulaciones (Huang *et al.*, 2007):

$$k = \frac{u^{*2}}{\sqrt{C\mu}} \quad (2)$$

donde k (m^2/s^2) representa la energía cinética turbulenta por unidad de masa asociada a las fluctuaciones de velocidad del fluido, es decir, los movimientos caóticos y desordenados que caracterizan la turbulencia.

$$\epsilon = \frac{u^{*3}}{0.4(z+z_0)} \quad (3)$$

donde ϵ (m^2/s^3) equivale a la tasa de disipación de energía turbulenta. Expresa la velocidad a la que la energía cinética contenida en los movimientos turbulentos se transforma en calor debido a la acción de la viscosidad del fluido.

$$\omega = \frac{\epsilon}{kC\mu} \quad (4)$$

donde ω es igual a la frecuencia específica de disipación (1/s). Se utiliza para el modelo de $k-\omega$ y simboliza la frecuencia con la que la energía cinética turbulenta se disipa en el flujo. Y por último:

$$u^{*0.4} = \frac{V_{ref}}{In\left(\frac{Z_0+Z_{ref}}{Z_0}\right)} \quad (5)$$

donde u^* expresa la velocidad de fricción (m/s) y Z_0 la altura de rugosidad del terreno. La ecuación permite obtener la velocidad ficticia con respecto a la rugosidad del terreno a una altura de referencia. Indica la intensidad del esfuerzo cortante que un fluido ejerce sobre una superficie, especialmente en flujos turbulentos cerca de paredes.

En la Tabla 4 se muestran los datos utilizados para realizar las simulaciones con CFD, dos de los cuales –velocidad de referencia (V_{ref}) y altura de referencia (Z_0)– fueron tomados de Kikuchi *et al.* (2024). La velocidad de entrada es respecto al oeste y la altura de rugosidad se obtuvo de Guevara Díaz (2013), donde el tipo de terreno se clasifica como *skimming*, correspondiente a una zona urbana con edificios altos. La presión de salida utilizada es 0.0 Pa para observar cómo se desarrolla el

fluido a lo largo de su trayectoria en el dominio, mientras que la constante de viscosidad dinámica del fluido ($C\mu$) es 0.09, valor considerado para las simulaciones con un modelo $k-\varepsilon$ o $k-\omega$ (Montazeri y Blocken, 2013).

Tabla 4.

Datos de entrada para cada simulación

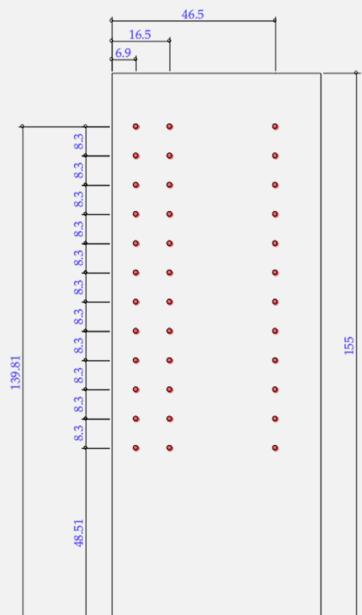
V_{ref}	Z_{ref}	Z_0	Presión de salida	Condiciones de pared	C
1.51 m/s	155 m	1 m	0.0 Pa	No deslizamiento	0.09

Fuente: elaboración propia a partir de Kikuchi *et al.* (2024)
y Montazeri y Blocken (2013)

En la Figura 7, se muestra la ubicación de los 36 puntos de interés en barlovento (Kikuchi *et al.*, 2024), con una dirección de incidencia del viento desde el oeste. Esto se hizo con el fin de comparar los mismos puntos entre los coeficientes de presión obtenidos a partir de los estudios experimentales y los valores arrojados por CFD.

Figura 7.

Ubicación de los 36 puntos de interés sobre
la cara barlovento del edificio



Fuente: Kikuchi *et al.* (2024)

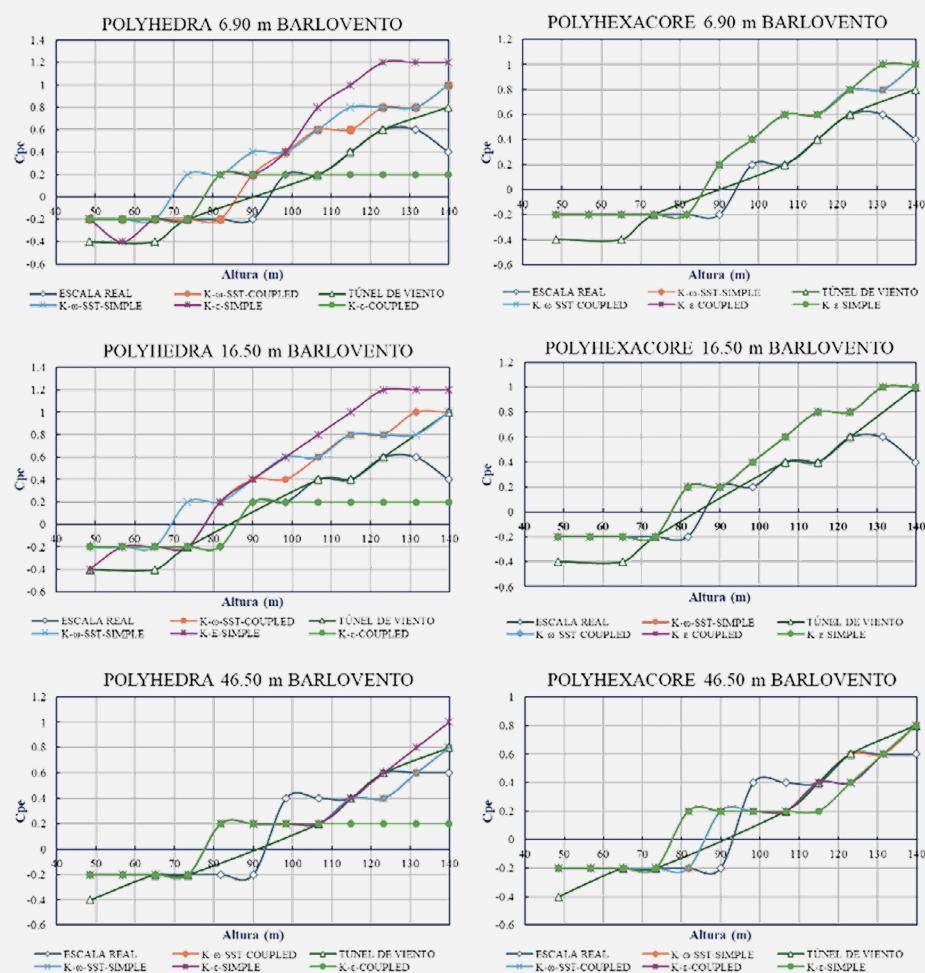
Resultados y discusión

Se elaboró una gráfica comparativa para evaluar los resultados obtenidos por medio de los dos tipos de mallado: *polyhedra* y *polyhexacore*. Asimismo, se analizó qué modelo de viscosidad se desempeñaba mejor. Para ello, se evaluaron el modelo $k-\varepsilon$ estándar y el modelo $k-\omega$ -SST, en sus métodos de solución simple y acoplada. En la Figura 8 se observa que la simulación $k-\omega$ -SST simple, con una malla *polyhexacore*, alcanza una precisión del 80% en los coeficientes de presión obtenidos a escala real. Sin embargo, a partir de 100 m de altura, los coeficientes obtenidos mediante simulaciones son mayores que los obtenidos en los estudios experimentales, aunque estos últimos son conservadores.

Figura 8.

Comparación de los coeficientes de presión sobre barlovento con distintos modelos de turbulencia y alturas:

$k-\varepsilon$ -standard-SIMPLE, $k-\varepsilon$ -standard-COUPLED, $k-\omega$ -SST-SIMPLE y $k-\omega$ -SST-COUPLED
(izquierda: *polyhedra*; derecha: *polyhexacore*)



Fuente: elaboración propia

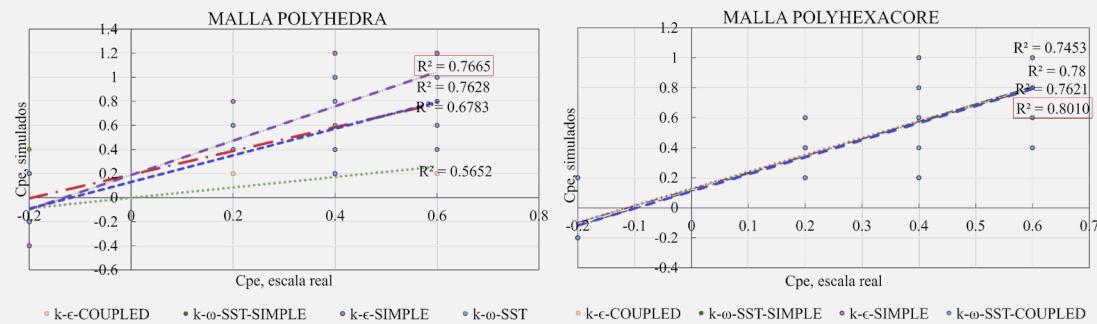
Cuando se obtuvieron los coeficientes de determinación (R^2), se encontraron mejores resultados en contraste con los del túnel de viento, como se muestra en la Figura 9 y la Figura 10. Este coeficiente se refiere a la comparación entre dos valores y evalúa la precisión o la similitud entre ambos: entre más cercano a 1, mayor es la correspondencia. En este caso, la comparativa se realizó entre los coeficientes de presión obtenidos en túnel de viento y en muestras a escala real, frente a los obtenidos por CFD. En total se efectuaron 16 simulaciones y se consideraron los valores de cada una para equipararlos con los datos extraídos de los estudios experimentales.

Los resultados indican que la malla *polyhedra*, aunque requiere un menor costo computacional, presenta algunas deficiencias para obtener coeficientes de presión sobre las paredes de una estructura, ya que sus valores se alejan de los obtenidos en las muestras experimentales. Además, se observa que el modelo de viscosidad $k-\omega$ -SST-SIMPLE arroja valores más cercanos a los datos de estudios a escala real y de túneles de viento, independientemente del tipo de malla, con una precisión del 80% y 92%, respectivamente. Por otro lado, el modelo $k-\varepsilon$ produce resultados más conservadores, pero también más alejados de los obtenidos en estudios experimentales, con una precisión del 76% para la malla *polyhedra* en ambos métodos de solución, en comparación con muestras a escala real, y del 87% en contraste con datos obtenidos por túnel de viento.

Con respecto al modelo $k-\omega$ -SST, en su método de solución SIMPLE, se muestra que se acopla mejor a este tipo de estudios, donde la velocidad y la turbulencia son altas. Adicionalmente, en relación con otros métodos de solución como LES, requiere un menor costo computacional, puesto que presenta errores no mayores al 7% con una malla *polyhexacore*.

Figura 9.

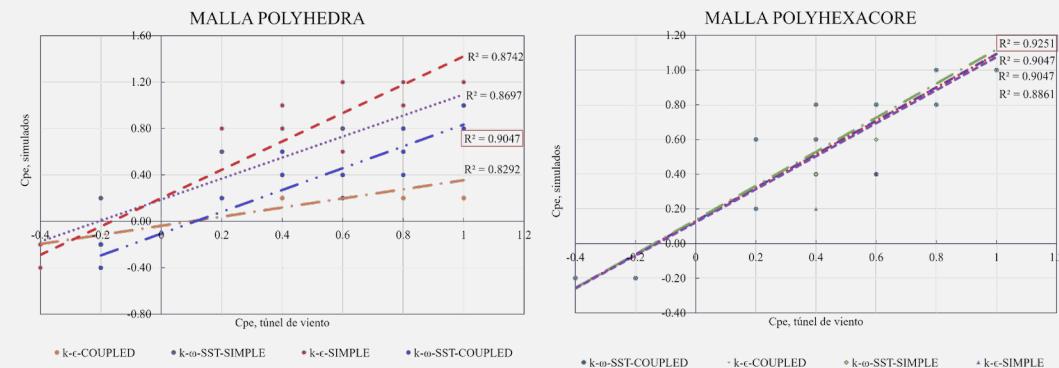
Coeficiente de determinación (R^2) de los resultados con modelos de turbulencia: $k-\varepsilon$ -standard-SIMPLE, $k-\varepsilon$ -standard-COUPLED, $k-\omega$ -SST-SIMPLE y $k-\omega$ -SST-COUPLED en comparación con datos obtenidos a escala real



Fuente: elaboración propia

Figura 10.

Coeficiente de determinación (R^2) de los resultados con modelos de turbulencia: $k-\varepsilon$ -standard-SIMPLE, $k-\varepsilon$ -standard-COUPLED, $k-\omega$ -SST-SIMPLE y $k-\omega$ -SST-COUPLED en comparación con datos obtenidos de túnel de viento



Fuente: elaboración propia

Las variaciones en los coeficientes de presión probablemente se debieron a que no se contaba con las medidas y coordenadas reales de los edificios aledaños, lo cual representó un problema para la investigación. Tampoco fue posible replicar toda la zona urbana con un radio de 3 km, sino que únicamente se modelaron los edificios colindantes que podían influir significativamente en la obtención de los resultados. Esto se hizo porque, al alcanzar la altura de las edificaciones aledañas –que impedían el paso directo del viento–, los coeficientes de presión se alejaban de los datos experimentales.

Por otro lado, es posible que la calidad ortogonal del malla haya influido en la precisión de los resultados, por lo que se deberían realizar simulaciones con una malla de mejor calidad, aunque esto requiera un mayor costo computacional. Cabe mencionar que en este estudio no fue posible hacerlo debido a que la versión estudiantil de Ansys Fluent limita el número de elementos que se pueden utilizar.

Entre las causas de precisión con respecto a los datos por medio de escala real, influyó la velocidad de referencia obtenida por la estación meteorológica. En el artículo donde se extrajeron los datos base, se menciona que estos se tomaron de la estación más cercana; sin embargo, aunque las velocidades son similares por la cercanía, no son iguales, puesto que influyen las perturbaciones existentes sobre la zona. Prueba de ello es la similitud de los resultados obtenidos en túnel de viento, que presentaron un error del 7%.

Otro aspecto a tener en cuenta es que el túnel de viento y las simulaciones por CFD consideran que las condiciones de las paredes son estructuras cerradas, sin contemplar las presiones internas ni la posible existencia de aberturas que podrían influir en la obtención de los coeficientes de presión sobre la pared exterior.

Conclusiones

Para realizar pruebas de viento en edificios, este estudio demuestra que se puede considerar las simulaciones mediante CFD, debido a su similitud con los resultados obtenidos en estudios experimentales en cuanto a la obtención de coeficientes de presión. Sin embargo, para que los resultados de las simulaciones sean confiables, es necesario contar con los recursos computacionales necesarios, así como con las dimensiones reales del objeto y de la zona de estudio. De esta manera, se lograría que las perturbaciones mediante simulaciones CFD sean mínimas.

Referencias

- Ansys. (2024). 4. Turbulencia. Ansys Fluent R2 2024. https://ansyshelp.ansys.com/public/account/secured?returnurl=/Views/Secured/corp/v242/en/flu_th/flu_th_sec_turb_kw_sst.html
- Baghaei Daemei, A., Khotbehsara, E.M., Nobarani, E.M. y Bahrami, P. (2019). Study on wind aerodynamic and flow characteristics of triangular-shaped tall buildings and CFD simulation in order to assess drag coefficient. *Ain Shams Engineering Journal*, 10(3), 541-548. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2018.08.008>
- Cruz Gavilán, Y., Valdés Hernández, P.A., Laffita Leyva, A., Gómez Águila, M.V. y Chairey, C.M. (2020). Computational fluid dynamics: review

- and analysis of applications in engineering. *Revista Ciencias Técnicas Agropecuarias*, 29(4).
- Fatchurrohman, N. y Chia, S.T. (2017). Performance of hybrid nano-micro reinforced mg metal matrix composites brake calliper: simulation approach. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 257. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/257/1/012060>
- Fernández Oro, J.M. (2012). *Técnicas numéricas en ingeniería de fluidos: Introducción a la dinámica de fluidos computacional (CFD) por el método de volúmenes finitos*. Editorial Reverté.
- Guevara Díaz, J.M. (2013). Cuantificación del perfil del viento hasta 100 m de altura desde la superficie y su incidencia en la climatología eólica. *Terra Nueva Etapa*, 29(46), 81-101.
- Haan F.L., Wang J., Sterling M. y Kopp G.A. (2024). Experimentally estimating wind load coefficients for tornadoes – An alternative perspective. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 251(105811). <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2024.105811>
- Huang S., Li Q.S. y Xu, S. (2007). Numerical evaluation of wind effects on a tall steel building by CFD. *Journal of Constructional Steel Research*, 63(5), 612-627. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2018.08.008>
- Hubova, O., Macak, M., Konecna, L. y Ciglan, G. (2017). External pressure coefficients on the atypical high-rise building – computing simulation and measurements in wind tunnel. *Procedia Engineering*, 190, 488-495. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.05.368>
- Ishida, Y., Yoshida, A., Yamane, Y. y Akashi M. (2024). Impact of a single high-rise building on the wind pressure acting on the surrounding low-rise buildings. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 250. <https://doi.org/10.1016/j.jweia.2024.105742>
- Khalil, I. y Lakkis, I. (2023). *Computational fluid dynamics: an introduction to modeling and applications* (1st Edition). McGrawHill. https://books.google.com.mx/books/about/Computational_Fluid_Dynamics_An_Introduc.html?id=eMCqEAAQBAJ&redir_esc=y
- Kikuchi, T., Ohtake, K., Takahashi, Y., Watanabe, H., Hidari, K., Tanabe, S. y Nobe, T. (2024). Comparison of wind pressure coefficients between wind tunnel experiments and full-scale measurements using operational data from an urban high-rise building. *Building and Environment*, 252(111244). <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2024.111244>
- Montazeri, H. y Blocken, B. (2013). CFD simulation of wind-induced pressure coefficients on buildings with and without balconies: validation and sensitivity analysis. *Building and Environment*, 60, 137-149. <https://doi.org/10.1016/j.buildenv.2012.11.012>
- Samaniego, G.F., Guerrero, B. y Antamba, J.F. (2021). Análisis del diseño aerodinámico de un alerón preparado para competencia utilizando simulaciones numéricas de dinámica de fluidos computacional (DFC). *Información tecnológica*, 32(2), 19-28.

- Versteeg, H.K. y Malalasekera, W. (2007). *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method* (2nd Edition). Pearson Education Limited.
- White, F.M. (2010). *Mecánica de fluidos*. McGraw-Hill.
- Wijesooriya, K., Mohotti, D., Lee, C.-K. y Mendis, P. (2023). A technical review of computational fluid dynamics (CFD) applications on wind design of tall buildings and structures: past, present and future. *Journal of Building Engineering*, 74(106828). <https://doi.org/10.1016/j.jobe.2023.106828>
- Xamán. J. y Gijón-Rivera, M. (2016). *Dinámica de fluidos computacional para ingenieros*. Palibrio.

Generalizaciones de las funciones inframonogénicas en el análisis de Clifford

Generalizations of inframonogenic functions in Clifford analysis

Daniel Alfonso Santiesteban* 

Ricardo Abreu Blaya 

Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México

Juan Bory Reyes 

Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México

*danielalfonso950105@gmail.com

DOI: [10.61820/dcqua.2395-8847.1735](https://doi.org/10.61820/dcqua.2395-8847.1735)

Fecha de recepción: 22 de septiembre del 2024

Fecha de aceptación: 18 de septiembre del 2025

Resumen

El análisis de Clifford se enfoca en las llamadas funciones monogénicas, reconocidas como generalizaciones naturales de las funciones holomorfas del plano complejo. Debido a la no conmutatividad del producto en álgebras de Clifford, surgen las funciones inframonogénicas como versión no conmutativa de las funciones armónicas. La construcción de operadores de Dirac con bases ortonormales arbitrarias de \mathbb{R}^m posibilita el surgimiento de una nueva subclase de funciones biarmónicas que generalizan a las funciones inframonogénicas. En este trabajo se tratará la fórmula integral de Cauchy y un problema de salto para este tipo de funciones, así como la conexión con el sistema de Lamé-Navier. Al finalizar se mostrarán problemas de frontera bien planteados y descomposiciones de Fischer para el espacio de polinomios $\mathbb{R}^m[x]$.

Palabras clave: análisis de Clifford, conjuntos estructurales, funciones inframonogénicas, operador de Dirac

Abstract

Clifford analysis focuses in the so-called monogenic functions, which are recognized as natural generalizations of the holomorphic functions of the complex plane. Due to the non-commutativity of the product in Clifford algebras, the inframonogenic functions arise as a non-commutative version of the harmonic

ones. The construction of Dirac operators with arbitrary orthonormal bases of \mathbb{R}^m makes possible the emergence of a new subclass of biharmonic functions that generalize to inframonogenic functions. In this work, a Cauchy integral formula and a jump problem for this type of functions will be discussed, as well as the connection with the Lamé-Navier system. At the end, well-posed boundary problems and Fischer decompositions for the polynomial space $\mathbb{R}^m[x]$ will be shown.

Keywords: Clifford analysis, Dirac operator, inframonogenic functions, structural sets

Introducción¹

El surgimiento de las álgebras de Clifford se remonta a 1876, cuando el matemático inglés William Kingdon Clifford combinó las ideas de William Rowan Hamilton con el álgebra exterior de Hermann Grassmann para introducir el famoso producto geométrico. Lamentablemente, Clifford solo vivió 33 años y no pudo divulgar la mayor parte de su obra. Allá por 1880, Rudolf Lipschitz nota que las reflexiones y rotaciones pueden ser interpretadas elegantemente usando el álgebra propuesta por Clifford. En 1913, el francés Élie Cartan se percata de que hay representaciones del grupo especial ortogonal que no son tensoriales y que tienen una estructura de álgebra de Clifford, conocidas hoy en día como “fibrados espinoriales”. Hasta este momento, las ideas abstractas del álgebra no habían sido tomadas en cuenta en el campo de la física, y para 1924 se acuñó el concepto de “espín de un electrón” para explicar experimentos como el efecto Zeeman anómalo y el experimento de Stern-Gerlach. Hacia 1925, Erwin Schrödinger descubre la notoria ecuación que lleva su nombre y con la cual se describe la evolución temporal de una partícula cuántica en el espacio. Dos años más tarde, Wolfgang Pauli logra incluir el concepto de espín en la ecuación de Schrödinger mediante sus matrices sigma y encuentra la ecuación no relativista del electrón. Las matrices de Pauli generan el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,3}$, descubierta en 1913 por Cartan. Finalmente, en la búsqueda de una factorización de la ecuación de Klein-Gordon, Paul Dirac concibió un operador diferencial de la forma

$$\partial = \sum_{i=0}^3 \gamma_i \partial_{xi},$$

tal que

¹ Este apartado (Introducción) contiene fragmentos de Alfonso Santesteban et al. (2025).

$$\partial^2 = \partial_{x_0}^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2.$$

La anterior relación implicaba lo siguiente:

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1, \quad \gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0 \quad \forall i \neq j.$$

Estas condiciones generan el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{1,3}$, la cual está asociada al álgebra del espacio-tiempo, que es esencial para comprender la geometría de la relatividad especial de Einstein. Con los trabajos de Rudolf Fueter, Grigore Moisil, David Hestenes y Richard Delanghe se constituye una subdisciplina del análisis matemático, centrada en el estudio de las soluciones nulas del operador de Dirac sobre álgebras de Clifford. En la década de 1970, el norteamericano John Ryan denominó esta subdisciplina como “análisis de Clifford”, término utilizado actualmente en la literatura científica. Las funciones inframonomogénicas surgen para la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden:

$$\underline{\partial}(f)\underline{\partial} = 0,$$

donde

$$\underline{\partial} := e_1\partial_{x_1} + e_2\partial_{x_2} + \cdots + e_m\partial_{x_m}$$

denota al clásico operador de Dirac sobre \mathbb{R}^m y construido con los generadores $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ del álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ (Gürlebeck y Sprössig, 1990). Estas funciones fueron originalmente introducidas por Malonek *et al.* (2010) cuando hallaron una descomposición de Fischer para el espacio de polinomios homogéneos en términos de polinomios inframonomogénicos. Los polinomios obtenidos en estas descomposiciones no se comportaban ortogonales, en general, a diferencia del caso armónico. Los mismos autores también probaron un teorema de extensión de Cauchy-Kowalevski para este tipo de funciones (Malonek *et al.*, 2011). Ambas aportaciones son esenciales para la construcción de bases ortonormales de espacios funcionales hipercomplejos. Investigaciones actuales (Moreno García *et al.*, 2017, 2018, 2020) ofrecen interesantes conexiones y aplicaciones de las funciones inframonomogénicas en elasticidad lineal.

Existen suficientes razones que justifican el interés de investigadores por estas peculiares funciones que surgen específicamente por la ausencia de la conmutatividad en el producto cliffordiano. El operador de Dirac en estas álgebras factoriza el

clásico operador de Laplace en el sentido de que se cumple la relación $\underline{\partial}^2 = -\Delta$. La ecuación $\underline{\partial}^2(f)\underline{\partial} = 0$ puede ser vista como una versión no conmutativa de la conocida ecuación de Laplace. En el contexto del cálculo vectorial, la anterior ecuación sándwich restringida a campos vectoriales tridimensionales $f = \vec{u}$ puede ser reescrita como

$$\text{grad}(\text{div } \vec{u}) + \text{rot}^2 \vec{u} = 0.$$

Puede notarse cómo la ecuación de Laplace toma la forma similar

$$\text{grad}(\text{div } \vec{u}) - \text{rot}^2 \vec{u} = 0.$$

El cambio de signo en ambas ecuaciones provoca que la segunda de ellas, a diferencia de la primera, sea fuertemente elíptica.

Sea un conjunto $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\} \subset \mathbb{R}^m$. Defínase el siguiente conjunto $\bar{\Psi} := \{\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2, \dots, \bar{\Psi}_m\}$. Actuando sobre $C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ donde Ω es un dominio abierto de \mathbb{R}^m , se exponen los operadores de Dirac por la izquierda y por la derecha, respectivamente, de la forma

$$\underline{\partial}(f) = \sum_{i=1}^m \Psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (f) \underline{\partial}^\Psi = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \Psi_i. \quad (1)$$

Sea Δ el operador de Laplace m -dimensional. Es evidente que las igualdades

$$\underline{\partial}^\Psi \underline{\partial}^{\bar{\Psi}}(f) = -\underline{\partial}^{\bar{\Psi}} \underline{\partial}^\Psi(f) = -(f) \underline{\partial}^\Psi \underline{\partial}^\Psi = (f) \underline{\partial}^\Psi \underline{\partial}^{\bar{\Psi}} = \Delta f \quad (2)$$

se cumplen si y solo si $\Psi_i \Psi_j + \Psi_j \Psi_i = -2\delta_{i,j}$ donde $\delta_{i,j}$ denota a la delta de Kronecker. Nótese que la factorización en (2) se tiene cuando y solo cuando Ψ es una base ortonormal de \mathbb{R}^m . Un conjunto Ψ con esta propiedad es llamado “conjunto estructural”. Nôno (1983, 1986) y Koriyama et al. (2011) fueron de los primeros autores en estudiar estas generalizaciones dentro del análisis cuaterniónico y, posteriormente, en el contexto cliffordiano (Nôno e Inenaga, 1987). El término “conjunto estructural” se utiliza por vez primera relacionado con el análisis cuaterniónico en los trabajos de Mitelman y Shapiro (1995) y Shapiro y Vasilevski (1995), mientras que en un ambiente del análisis de Clifford se encuentra el trabajo de Shapiro (1988). Las funciones que anulan a estos operadores de Dirac se conocen como “funciones Ψ -hiperholomorfas”.

El uso de conjuntos estructurales arbitrarios posibilita el estudio de una gran variedad de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. La ecuación sándwich generalizada

$$\underline{\partial}^\varphi(f)\underline{\partial}^\Psi=0$$

surge al considerar dos conjuntos estructurales: φ y Ψ . Las soluciones de esta ecuación son nombradas como “funciones (φ, Ψ) -inframonomogénicas” (Alfonso Santiesteban *et al.*, 2022a) y representan una generalización de las ya conocidas funciones inframonogénicas. El objetivo del presente trabajo es realizar una revisión detallada de algunos de los principales resultados obtenidos en la literatura para las funciones (φ, Ψ) -inframonomogénicas. Entre ellos consideraremos las representaciones integrales de Borel-Pompeiu y de Cauchy, las relaciones con la transformada de Ahlfors-Beurling, el uso de un operador de Teodorescu para resolver problemas de frontera en dominios con frontera fractal, la reescritura del sistema de Lamé-Navier, el planteamiento y resolución de dos problemas de frontera bien planteados en el sentido de Hadamard y algunas descomposiciones de Fischer. Para una discusión profunda del uso de dos bases ortonormales simultáneamente referimos al lector a Abreu Blaya *et al.* (2015, 2016, 2017) y Bory Reyes *et al.* (2016).

Metodología

Los métodos de investigación empleados en este trabajo se determinaron con base en los objetivos y las tareas de investigación planteadas. En particular fueron considerados los siguientes: histórico-lógico, análisis y síntesis, inducción y deducción, y a nivel empírico: experimental y modelación; todos de gran utilidad en el estudio de fuentes de información y el procesamiento de los fundamentos científicos. Se hace necesario el uso de un cuerpo teórico enfocado en los temas del álgebra no conmutativa, la geometría fractal, el análisis hipercomplejo y el cálculo fraccionario, que a grandes rasgos incluye el producto de Fischer, la derivada de Caputo, las relaciones de Weyl, los operadores Gamma y Euler, el operador fraccionario de Dirac sobre un fibrado espinorial, la condición de d -sumabilidad, las transformadas de Cauchy y de Teodorescu, el Π -operador, la compacidad de operadores integrales singulares sobre el espacio de funciones p -integrables, las ecuaciones integrales de tipo Fredholm y el problema espectral asociado al operador sándwich. Por ello, en la siguiente sección se introducen algunas

nociones básicas relacionadas con las álgebras de Clifford y la teoría de funciones Ψ -hipercomplejas.

Nociones preliminares²

El álgebra real de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ se genera mediante la base canónica $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ de \mathbb{R}^m , bajo las reglas de multiplicación: $e_i^2 = -1$, $e_i e_j = -e_j e_i$, $i, j = 1, 2, \dots, m$, $i < j$. La ya mencionada álgebra asociativa y no conmutativa constituye el espacio lineal 2^m -dimensional generado por los k -vectores que forman los elementos de la base canónica, es decir:

$$\mathbb{R}_{0,m} = \langle 1, e_1, e_2, \dots, e_m, e_1 e_2, e_1 e_3, \dots, e_{m-1} e_m, e_1 e_2 e_3, \dots, e_1 e_2 \dots e_m \rangle.$$

Las álgebras de Clifford tienen innumerables aplicaciones, como un manejo efectivo de las rotaciones en un espacio de alta dimensión con el empleo de los llamados “grupos espinoriales”, en particular el grupo de Lorentz de la relatividad especial. Además, estas álgebras permiten reinterpretar y manipular algebraicamente muchos conceptos de interés dentro de la física teórica, la computación, el análisis y la geometría.

El espacio euclíadiano \mathbb{R}^m está inmerso en el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ al identificar cada vector $\underline{x} := (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ con el vector cliffordiano $x = \sum_{i=1}^m e_i x_i$. Cualquier elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito como $a = \sum_A a_A e_A$, donde a_A son constantes reales y A recorre todos los posibles conjuntos ordenados $A = \{1 \leq i_1 < \dots < i_k < \dots \leq m\} \cup A = \emptyset$ y $e_A = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$. Note que entonces cualquier $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ se puede reescribir de forma única como $a = [a]_0 + [a]_1 + \cdots + [a]_m$, donde $[.]_k$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,m}$ en $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$. Aquí $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ denota el subespacio de k -vectores definido por $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} := \text{span}_{\mathbb{R}}(e_A : |A| = k)$. Es costumbre identificar a \mathbb{R} con $\mathbb{R}_{0,m}^{(0)}$ (los conocidos escalares) y a \mathbb{R}^m con $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)} \cong \mathbb{R}^m$ (el conjunto de vectores). Los elementos en $\mathbb{R}_{0,m}^{(2)}$ son llamados bivectores, y los elementos en $\mathbb{R}_{0,m}^{(m)}$, pseudoescalares.

El producto de un 1-vector u y un k -vector F_k estará dado por la suma de un $(k-1)$ -vector y un $(k+1)$ -vector:

$$uF_k = [uF_k]_{k-1} + [uF_k]_{k+1},$$

donde

$$[uF_k]_{k-1} = \frac{1}{2} [uF_k - (-1)^k F_k u] \text{ y } [uF_k]_{k+1} = \frac{1}{2} [uF_k + (-1)^k F_k u].$$

² Este apartado (Nociones preliminares) contiene fragmentos de Alfonso Santesteban *et al.* (2025).

Los productos interior y exterior entre u y F_k serán definidos por $u \cdot F_k := [uF_k]_{k-1}$ y $u \wedge F_k := [uF_k]_{k+1}$, respectivamente. La conjugación en $\mathbb{R}_{0,m}$ es definida como el antiautomorfismo $a \rightarrow \bar{a}$, donde $\bar{e_i} = e_i \forall i \in \{1, \dots, m\}$. Una norma $\|\cdot\|$ sobre $\mathbb{R}_{0,m}$ es definida por $\|a\|^2 = [a\bar{a}]_0$ para $a \in \mathbb{R}_{0,m}$. Observe que para $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ se obtiene que $\|\underline{x}\| = |\underline{x}|$, la norma euclíadiana usual.

Se considerarán funciones definidas sobre dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ y con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$. Estas funciones son escritas como $f = \sum_A f_A e_A$, donde f_A son funciones reales. Las nociones de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad tienen el usual sentido a través de todas sus componentes reales, es decir, una función f satisface una de estas propiedades si todas sus componentes reales f_A la satisfacen (Brackx et al., 1982; Delanghe, 2001; Delanghe et al., 2001; Liu y Hong, 2018). Recientemente, el operador de Dirac ha sido el tema central de estudio en muchas áreas de la matemática y la física-matemática. Las propiedades locales de las soluciones de este operador han conducido a la teoría de funciones conocida como “análisis de Clifford” (Gürlebeck y Nguyen, 2014; Liu y Hong, 2018).

El operador de Dirac se define como

$$\underline{\partial} := e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + e_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

y las funciones que este anula se llaman “funciones monogénicas”. Dicho operador juega el mismo rol en esta teoría que el clásico operador de Cauchy-Riemann para las funciones holomorfas del plano complejo. Una función que toma valores en $\mathbb{R}_{0,m}$, definida y diferenciable en un abierto Ω de \mathbb{R}^m , se denomina “monogénica por la izquierda (monogénica por la derecha)” en Ω si $\underline{\partial}(f) = 0$ ($(f)\underline{\partial} = 0$) en Ω .

El operador generalizado de Dirac puede construirse considerando una base ortonormal arbitraria de \mathbb{R}^m y se define de la siguiente forma:

$$\underline{\partial}^\varphi := \sum_{i=1}^m \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ es dicha base. En la literatura, como se mencionó en la introducción, el término “conjunto estructural” es atribuido a estas bases ortonormales arbitrarias (Shapiro, 1988). De esta forma, se introducen las funciones φ -hiperholomorfas (por la izquierda o derecha, respectivamente) como aquellas que pertenecen a $Ker [\underline{\partial}^\varphi (\cdot)]$ o $Ker [(\cdot) \underline{\partial}^\varphi]$. Se denominará a los espacios de funciones φ -hiperholomorfas por la izquierda y por la derecha sobre un dominio Ω con las simbologías: $M_l^\varphi(\Omega)$

y $M_r^\varphi(\Omega)$, respectivamente. El operador previo también factoriza al operador de Laplace, como lo hace el de Dirac estándar.

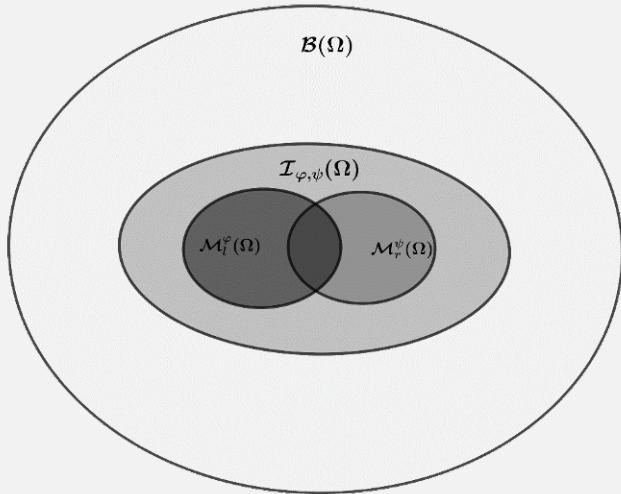
Dado otro conjunto estructural $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m\}$, recientemente se ha estudiado la siguiente subclase de funciones biarmónicas:

$$\mathfrak{X}_{\varphi, \Psi}(\Omega) = \{f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) : \underline{\partial}^\varphi(f) \underline{\partial}^\Psi = 0\},$$

las cuales son denominadas funciones (φ, Ψ) -inframonogénicas (Alfonso Santesteban *et al.*, 2022a). Las funciones φ -hiperholomorfas por la izquierda y Ψ -hiperholomorfas por la derecha son casos particulares de funciones (φ, Ψ) -inframonogénicas. Cuando $\varphi = \Psi = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, la clase anterior se convierte en la clase de las funciones inframonogénicas, cuyas interesantes relaciones con el sistema de Lamé-Navier en elasticidad lineal y otros temas afines han sido objeto de estudio de varios investigadores (Alfonso Santesteban, 2024; Malonek *et al.*, 2010; Moreno García *et al.*, 2018). Dichas funciones pueden verse como una versión no conmutativa de las conocidas funciones armónicas, pero se ha comprobado que existen significativas diferencias entre ambas, como que el problema de Dirichlet deja de ser bien planteado en el sentido de Hadamard (Moreno García *et al.*, 2022). Se pueden construir polinomios (φ, Ψ) -inframonogénicos sobre dominios elipsoidales tales que en la frontera se anulan. En la Figura 1 se muestran los espacios de funciones (φ, Ψ) -inframonogénicas, φ -hiperholomorfas por la izquierda, Ψ -hiperholomorfas por la derecha y biarmónicas. Este último espacio se denotará por $B(\Omega)$.

Figura 1.

Espacios de funciones (φ, Ψ) -inframonomogénicas,
 φ -hiperholomorfas por la izquierda, Ψ -hiperholomorfas
por la derecha y biarmónicas



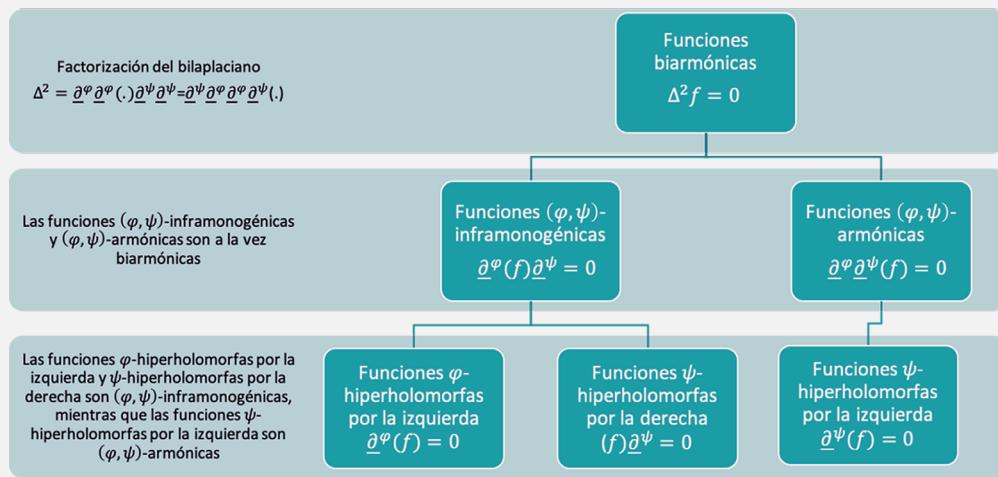
Fuente: elaboración propia

Cabe mencionar que el uso de dos conjuntos estructurales arbitrarios también posibilita el estudio de una nueva clase de funciones definidas como las soluciones de la ecuación $\underline{\partial}^\varphi \underline{\partial}^\Psi(f) = 0$. Estas funciones se conocen como (φ, Ψ) -armónicas y constituyen asimismo un subespacio propio de las biarmónicas (Serrano Ricardo *et al.*, 2021). La utilización de conjuntos estructurales permite encontrar nuevas perspectivas en varias líneas de investigación relacionadas con mapeos M-conformes, transformadas de Ahlfors-Beurling, fórmulas alternativas de Kolosov-Muskhelishvili y descomposiciones aditivas de polinomios contragénicos. Además, con los conjuntos estructurales se pueden reconsiderar desde un punto de vista diferente muchos problemas antiguos de geometría y análisis, como el recíproco de una función monogénica y la composición de una función monogénica y una transformación de Möbius.

En el siguiente esquema se mostrarán algunas relaciones de jerarquía entre estas clases funcionales a través de la factorización del bilaplaciano mediante los operadores elípticos $\underline{\partial}^\varphi(\cdot)\underline{\partial}^\Psi$ y $\underline{\partial}^\varphi\underline{\partial}^\Psi(\cdot)$.

Esquema 1.

Relaciones jerárquicas entre distintas clases funcionales

**Fuente:** elaboración propia

Una interesante propiedad de las funciones (φ, φ) -inframonomogénicas, que también poseen las funciones armónicas, es la presentada por Alfonso Santesteban *et al.* (2022b):

Proposición 1

Una función f es (φ, φ) -inframonomogénica en Ω si y solo si cada componente k -vectorial $[f]_k$, $0 \leq k \leq m$, es (φ, φ) -inframonomogénica en Ω .

Demostración

La implicación inversa se demuestra gracias a la siguiente descomposición aditiva:

$$\underline{\partial}^\varphi(f) \underline{\partial}^\varphi = \sum_{k=0}^m \underline{\partial}^\varphi [f]_k \underline{\partial}^\varphi.$$

Es evidente que, si $\underline{\partial}^\varphi [f]_k \underline{\partial}^\varphi = 0$ para todo $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, entonces $\underline{\partial}^\varphi(f) \underline{\partial}^\varphi = 0$. Para la prueba de la implicación directa se procede como sigue. La acción del operador generalizado de Dirac sobre cada componente k -vectorial de la función f puede ser vista como

$$\underline{\partial}^\varphi [f]_k = \underline{\partial}^\varphi \cdot [f]_k + \underline{\partial}^\varphi \wedge [f]_k$$

donde

$$\underline{\partial}^\varphi \cdot [f]_k = \frac{1}{2} (\underline{\partial}^\varphi [f]_k - (-1)^k [f]_k \underline{\partial}^\varphi)$$

y

$$\underline{\partial}^\varphi \wedge [f]_k = \frac{1}{2} (\underline{\partial}^\varphi [f]_k + (-1)^k [f]_k \underline{\partial}^\varphi).$$

Mediante un cálculo sencillo se obtiene que

$$\underline{\partial}^\varphi [f]_k \underline{\partial}^\varphi = (-1)^k (\underline{\partial}^\varphi \cdot \underline{\partial}^\varphi \wedge [f]_k - \underline{\partial}^\varphi \wedge \underline{\partial}^\varphi \cdot [f]_k) \in \mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$$

o sea, el operador $\underline{\partial}^\varphi(\cdot)\underline{\partial}^\varphi$ transforma k -vectores en k -vectores. Si $\underline{\partial}^\varphi f \underline{\partial}^\varphi = 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^m \underline{\partial}^\varphi [f]_k \underline{\partial}^\varphi = 0.$$

Como $\underline{\partial}^\varphi [f]_k \underline{\partial}^\varphi \in \mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$, entonces necesariamente $\underline{\partial}^\varphi [f]_k \underline{\partial}^\varphi = 0$ para cada $k \in \{0, 1, \dots, m\}$, lo que concluye la demostración.

Sin embargo, esta propiedad no es válida en general para conjuntos estructurales diferentes. Como un simple contraejemplo, tomemos la función $h(\underline{x}) = (\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \sqrt{2}x_1x_2 - x_3^2)e_1e_2e_3 - x_3^2e_2$ y sean los siguientes dos conjuntos estructurales de $\mathbb{R}^3 : \varphi = \{e_1, e_3e_2\}$ y $\Psi = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_3), \frac{\sqrt{2}}{2}(e_3 - e_1), -e_2\right\}$. Por cálculos directos es fácil comprobar que $\underline{\partial}^\varphi [h] \underline{\partial}^\Psi = 0$, mientras que $\underline{\partial}^\varphi [h]_1 \underline{\partial}^\Psi = -2e_2 \neq 0$ y $\underline{\partial}^\varphi [h]_3 \underline{\partial}^\Psi = 2e_2 \neq 0$. No obstante, una versión débil de la propiedad enunciada en la Proposición 1 puede ser obtenida. Una función f es (φ, Ψ) -inframonogénica en Ω si y solo si sus partes par

$$f_+ = \sum_{k-par} [f]_k$$

e impar

$$f_- = \sum_{k-impar} [f]_k$$

también lo son. En el ejemplo anterior descrito evidentemente se verifica esta propiedad, ya que $h_+ = 0$ y $\underline{\partial}^\varphi h_- \underline{\partial}^\Psi = \underline{\partial}^\varphi [h]_1 \underline{\partial}^\Psi + \underline{\partial}^\varphi [h]_3 \underline{\partial}^\Psi = 0$.

La solución fundamental del operador $\underline{\partial}^\Psi$ es dada por $K_\Psi(\underline{x}) = \underline{\partial}^\Psi [E_1(\underline{x})]$, donde E_1 es la solución fundamental del laplaciano m -dimensional. Los núcleos de Cauchy generan los siguientes dos operadores integrales:

$$(T_\Psi^l g)(\underline{x}) = - \int_{\Omega} K_\Psi(\underline{y} - \underline{x}) g(\underline{y}) dV(\underline{y})$$

y

$$\left(C_{\varphi, \Psi}^l g\right)(\underline{x}) = \int_{\Gamma} K_\varphi(\underline{y} - \underline{x}) n_\Psi(\underline{y}) g(\underline{y}) dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \notin \Gamma,$$

donde Ω es un dominio abierto y simplemente conexo de \mathbb{R}^m con una frontera Γ suficientemente suave, $n_\Psi(\underline{y}) = \sum_{i=1}^m \Psi_i n_i(\underline{y})$ y

$n_i(\underline{y})$ denota a la i -ésima componente del vector normal, unitario y exterior a Γ en el punto $\underline{y} \in \Gamma$. Los operadores anteriores son conocidos como transformadas de Teodorescu y de Cauchy, respectivamente. Cuando $\varphi = \Psi$, la segunda transformada se convierte en la transformada integral de Cauchy tradicional asociada a un conjunto estructural. Intercambiando los núcleos singulares con la función se obtienen las versiones de los operadores anteriores por la derecha. El teorema de Stokes, convenientemente usado, conecta estas transformadas de Teodorescu y de Cauchy con una transformada multidimensional de Ahlfors-Beurling definida por $\prod_{\varphi, \Psi}^l = \underline{\partial}^\varphi [T_\Psi^l]$ (Abreu Blaya *et al.*, 2016). Se introducirán los siguientes nuevos operadores:

$$\left(C_{\varphi, \Psi}^{0,r} g \right) (\underline{x}) = \int_{\Gamma} K \varphi(\underline{y} - \underline{x}) n_\varphi(\underline{y}) g(\underline{y}) (\underline{y}_\Psi - \underline{x}_\Psi) dS(\underline{y}), \quad (3)$$

$$\left(C_{\varphi, \Psi}^{1,r} g \right) (\underline{x}) = \sum_{i=1}^m \varphi_i \left[\int_{\Gamma} E_1(\underline{y} - \underline{x}) n_\varphi(\underline{y}) g(\underline{y}) dS(\underline{y}) \right] \Psi_i, \quad (4)$$

$$\left(T_{\varphi, \Psi}^{0,r} g \right) (\underline{x}) = - \int_{\Omega} K \varphi(\underline{y} - \underline{x}) g(\underline{y}) (\underline{y}_\Psi - \underline{x}_\Psi) dV(\underline{y}), \quad (5)$$

$$\left(T_{\varphi, \Psi}^{1,r} g \right) (\underline{x}) = - \sum_{i=1}^m \varphi_i \left[\int_{\Omega} E_1(\underline{y} - \underline{x}) g(\underline{y}) dV(\underline{y}) \right] \Psi_i, \quad (6)$$

donde $n_\varphi = \sum_{i=1}^m n_i \varphi_i$, siendo n_i la i -ésima componente del vector normal, unitario y exterior sobre la frontera $\Gamma = \partial\Omega$, $\underline{y}_\Psi = \sum_{i=1}^m y_i \Psi_i$ y $\underline{x}_\Psi = \sum_{i=1}^m x_i \Psi_i$. A partir de estos se introducen los siguientes operadores:

$$C_{\varphi, \Psi}^{i,r} g = \frac{1}{2} (C_{\varphi, \Psi}^{0,r} g + C_{\varphi, \Psi}^{1,r} g), \quad T_{\varphi, \Psi}^{i,r} g = \frac{1}{2} (T_{\varphi, \Psi}^{0,r} g + T_{\varphi, \Psi}^{1,r} g).$$

El primero de estos se identifica como una transformada de Cauchy (φ, Ψ) -inframonogénica, mientras que el segundo representa una generalización de la transformada de Teodorescu y cumple la siguiente importante relación de invertibilidad:

$$\underline{\partial}^\varphi (T_{\varphi, \Psi}^{i,r} g) \underline{\partial}_\Psi = g.$$

Se remite al lector a Alfonso Santiesteban *et al.* (2022a), donde se prueba la anterior relación. Los operadores (3), (4), (5) y (6) pueden ser concebidos cuando la función g aparece a la izquierda del núcleo y tomarían las siguientes formas:

$$\left(C_{\varphi, \Psi}^{0,l} g \right) (\underline{x}) = \int_{\Gamma} (\underline{y}_\varphi - \underline{x}_\varphi) g(\underline{y}) n_\Psi(\underline{y}) K_\Psi(\underline{y} - \underline{x}) dS(\underline{y}),$$

$$\left(C_{\varphi, \Psi}^{1,l} g \right) (\underline{x}) = \sum_{i=1}^m \varphi_i \left[\int_{\Gamma} g(\underline{y}) n_\Psi(\underline{y}) E_1(\underline{y} - \underline{x}) dS(\underline{y}) \right] \Psi_i,$$

$$\left(T_{\varphi, \Psi}^{0,l} g \right) (\underline{x}) = - \int_{\Omega} (\underline{y}_{\varphi} - \underline{x}_{\varphi}) g(\underline{y}) K_{\Psi}(\underline{y} - \underline{x}) dV(\underline{y}),$$

$$\left(T_{\varphi, \Psi}^{1,l} g \right) (\underline{x}) = - \sum_{i=1}^m \varphi_i \left[\int_{\Omega} g(\underline{y}) E_1(\underline{y} - \underline{x}) dV \right] \Psi_i.$$

Las versiones por la izquierda de las transformadas de Teodorescu y de Cauchy (φ, Ψ) -inframonomogénicas se definirían como

$$C_{\varphi, \Psi}^{i,l} g = \frac{1}{2} \left(C_{\varphi, \Psi}^{0,l} g + C_{\varphi, \Psi}^{1,l} g \right), \quad T_{\varphi, \Psi}^{i,l} g = \frac{1}{2} \left(T_{\varphi, \Psi}^{0,l} g + T_{\varphi, \Psi}^{1,l} g \right).$$

Las anteriores transformadas cumplen las mismas propiedades que sus análogas por la derecha. En el desarrollo de todo el trabajo se usarán las transformadas en su versión por la derecha; compréndase que resultados similares pueden ser obtenidos si se asumen las respectivas transformadas por la izquierda.

Problema de salto

Sea Ω un dominio abierto y acotado de \mathbb{R}^m con una frontera Γ suficientemente suave. Como se ha mencionado anteriormente, una función $f \in C^s(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$, $s \in \mathbb{Z}_+$, se puede representar como

$$f = \sum_A f_A e_A,$$

donde $f_A \in C^s(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R})$. Entiéndase una función real s -veces continuamente diferenciable en el cerrado $\Omega \cup \Gamma$ como aquella cuyas derivadas parciales de orden s son continuas en Ω y hasta la frontera de este dominio (Loomis y Sternberg, 1990).

En el estudio de la teoría de funciones (φ, Ψ) -inframonomogénicas, una fórmula de tipo Borel-Pompeiu es un elemento fundamental. En Alfonso Santiesteban *et al.* (2022a) se demuestra la siguiente fórmula de representación integral:

Teorema 1 (fórmula de Borel-Pompeiu)

Sea $f_A \in C^s(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$. Entonces en Ω se tiene que

$$f(\underline{x}) = (C_{\Psi}^r)(\underline{x}) + (C_{\varphi, \Psi}^{i,r}(f) \underline{\partial}^{\Psi})(\underline{x}) + (T_{\varphi, \Psi}^{i,r} \underline{\partial}^{\Psi}(f) \underline{\partial}^{\Psi})(\underline{x}). \quad (7)$$

Para funciones (φ, Ψ) -inframonomogénicas sobre Ω , la transformada de tipo Teodorescu en (7) se anula y se obtiene que los valores de la función en Ω son determinados según los valores de la función y de sus derivadas de primer orden sobre la frontera del dominio. Este resultado se muestra en el siguiente corolario que brinda una fórmula integral de tipo Cauchy para estas funciones.

*Corolario 1
(fórmula integral
de Cauchy)*

Sea $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$ una función (φ, Ψ) -inframonomogénica en Ω , entonces esta puede ser representada como

$$f(\underline{x}) = (C_{\Psi}^r f)(\underline{x}) + (C_{\varphi, \Psi}^{i,r}(f) \underline{\partial}^{\Psi})(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega. \quad (8)$$

La fórmula (8) permite resolver de forma inmediata el siguiente problema de salto:

$$\begin{cases} \underline{\partial}^{\varphi}(F) \underline{\partial}^{\Psi} = 0, & \underline{x} \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \\ F^+(\underline{x}) - F^-(\underline{x}) = f(\underline{x}), & \underline{x} \in \Gamma, \\ [(F) \underline{\partial}^{\Psi}]^+(\underline{x}) - [(F) \underline{\partial}^{\Psi}]^-(\underline{x}) = g(\underline{x}), & \underline{x} \in \Gamma, \\ F(\infty) = ((F) \underline{\partial}^{\Psi})(\infty) = 0, \end{cases}$$

donde f, g se asumen como funciones de Hölder con exponente $0 < v \leq 1$ sobre Γ . Según las fórmulas de Plemelj-Sokhotski y la representación (8), se obtiene que la función

$$F(\underline{x}) = (C_{\Psi}^r f)(\underline{x}) + (C_{\varphi, \Psi}^{i,r} g)(\underline{x})$$

es la solución del problema de salto anterior. La unicidad de esta solución es asegurada por una combinación de los teoremas de Painlevé y de Liouville en análisis de Clifford (Brackx *et al.*, 1982). Este problema de salto es un caso específico de problema de tipo Riemann-Hilbert, cuya resolución, para casos generales, se dificulta usando el método tradicional presentado por Gakhov (1990) debido a que el operador de Dirac aparece involucrado por diferentes lados de la función.

El Π -operador complejo, o transformada de Ahlfors-Beurling, es muy utilizado en análisis complejo en la teoría de mapeos cuasiconformes en el plano. Este operador fuertemente singular se comporta isométrico sobre $L^2(\Omega)$ y, en el sentido de distribuciones, se tiene que $\Pi_{\Omega}[\partial_z h(z)] = \partial_z h(z)$ (Ahlfors, 2006; Bañuelos y Janakiraman, 2008; Calderón y Zygmund, 1954; Donaldson y Sullivan, 1989). Cabe mencionar que algunas extensiones naturales del Π -operador complejo pueden ser concebidas utilizando la transformada de Teodorescu del análisis de Clifford (Gürlebeck, 1998; Gürlebeck *et al.*, 1999; Krausshar y Malonek, 2001). El operador $\Pi_{\varphi, \Psi}^r$ puede ser considerado como una generalización multidimensional de Π_{Ω} y muchas de sus propiedades de invertibilidad y mapeo son descritas por Abreu Blaya *et al.* (2016). En nuestro contexto, este operador tiene la importante característica de que mapea $\mathfrak{S}_{\varphi, \Psi}(\Omega)$ sobre

$\mathfrak{I}_{\varphi,\Psi}(\Omega)$. Una generalización de la fórmula de Borel-Pompeiu es la demostrada por Alfonso Santesteban *et al.* (2022a) que se presenta a continuación:

Teorema 2

Sea $f \in C^2(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$, entonces

$$\Pi_{\varphi,\Psi}^r[f](\underline{x}) = (C_{\varphi,\Psi}^r f)(\underline{x}) + (C_{\varphi,\varphi}^{i,r}(f)\underline{\partial}^\Psi)(\underline{x}) + (T_{\varphi,\varphi}^{i,r}\underline{\partial}^\Psi(f)\underline{\partial}^\Psi)(\underline{x}). \quad (9)$$

Observe que cuando la función es (φ, Ψ) -inframonogénica, se obtiene una representación de esta transformada de Ahlfors-Beurling solo mediante integrales de superficie. Por tanto, solo basta conocer los valores de la función y de sus derivadas en la frontera para conocer la transformada en todo el dominio.

A continuación, se mostrará un resultado relacionado con el problema de salto cuando el dominio tiene frontera fractal (Alfonso Santesteban *et al.*, 2022a). En este caso, la técnica de trabajo está inspirada en la utilizada por Kats (1983) para las funciones holomorfas en el plano complejo. Para ello se asume que la frontera de los dominios satisface la condición de ser d -sumable en el sentido de Harrison y Norton (1992). Una curva γ se dice que es d -sumable si la integral impropia

$$\int_0^1 N_y(\tau) \tau^{d-1} d\tau$$

converge, donde $N_y(\tau)$ representa el número mínimo de bolas de radio τ necesarias para cubrir γ . Además de ello, se asumirán las trazas del problema sobre la clase de Lipschitz de orden superior.

Sea k un entero no negativo y $0 < v < 1$. Las clases de Lipschitz de orden superior, denotadas por la notación $Lip(k+v, \gamma)$, consisten en colecciones de funciones continuas reales

$$f := \{f^j, |j| \leq k\}$$

definidas en γ tales que satisfacen las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$\left| f^{(j)}(\underline{x}) - \sum_{|j+l| \leq k} \frac{f^{(j+l)}(\underline{y})}{l!} (\underline{x} - \underline{y})^l \right| = O(|\underline{x} - \underline{y}|^{k+\nu-|j|}),$$

donde $\underline{x}, \underline{y} \in \Gamma$ y $|j| \leq k$. En este caso (j) es un multiíndice y se utilizan las notaciones propias para estos. Whitney (1934) probó que tal colección de funciones puede ser extendida mediante una función de Hölder continuamente diferenciable hasta el orden k y con exponente ν .

Las nociones de conjunto d -sumable y de clases de Lipschitz de orden superior son extendidas de un modo similar al contexto multidimensional. El siguiente resultado para el problema de salto asociado a funciones (φ, ψ) -inframonogénicas es probado por Alfonso Santiesteban *et al.* (2022a):

Teorema 3
(problema de salto)

Sea $f \in Lip(1 + \nu, \Gamma)$ y sea Γd -sumable con $\nu > \frac{d}{m}$. Entonces el problema de salto

$$\begin{cases} \underline{\partial}^\varphi(F)\underline{\partial}^\psi = 0, & \underline{x} \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \\ F^+(\underline{x}) - F^-(\underline{x}) = f(\underline{x}), & \underline{x} \in \Gamma, \\ [(F)\underline{\partial}^\psi]^+(\underline{x}) - [(F)\underline{\partial}^\psi]_-(\underline{x}) = ((\tilde{f})\underline{\partial}^\psi)(\underline{x}), & \underline{x} \in \Gamma, \\ F(\infty) = ((F)\underline{\partial}^\psi)(\infty) = 0 \end{cases}$$

tiene una solución dada por

$$F(\underline{x}) = \tilde{f}(\underline{x})\chi_\Omega(\underline{x}) - T_{\varphi, \psi}^{i, r} [\underline{\partial}^\varphi(\tilde{f})\underline{\partial}^\psi](\underline{x}),$$

donde Ω_+ y Ω_- denotan respectivamente a los dominios interior y exterior, χ_Ω es la función característica de Ω y \tilde{f} representa la extensión de Whitney para f .

La unicidad del problema de salto para el caso de dominios fractales no se puede garantizar directamente debido a que el teorema de Painlevé no es válido para tal nivel de irregularidad geométrica. Sin embargo, para el caso de dominios con frontera suave, sí es posible asegurar la unicidad de la solución dada por la fórmula integral de Cauchy, usando las fórmulas de Plemelj-Sokhotski.

Sistema de Lamé-Navier

El análisis complejo ha permitido estudiar y resolver problemas elásticos utilizando las conocidas fórmulas de Kolosov-Muskhelishvili, mientras que el análisis de Clifford ha ayudado a reinterpretar elegantemente muchas de las ecuaciones de la elasticidad lineal desde un contexto multidimensional.

Un campo de desplazamiento tridimensional \vec{u} en un material elástico lineal, isotropo, homogéneo y sin fuerzas de volumen es descrito por el sistema de Lamé-Navier:

$$\mathcal{L}_{\{\lambda, \mu\}}\vec{u} = \mu\Delta\vec{u} + (\mu + \lambda)\text{grad}(\text{div}\vec{u}) = 0, \quad (10)$$

donde $\mu > 0$, $\lambda > -2\mu/3$ son los coeficientes de Lamé. Este sistema fue introducido en 1837 por Gabriel Lamé en el método de separación de variables para la solución de la ecuación de

onda en coordenadas elípticas (Lamé, 1837). Sus aplicaciones cubren muchas ramas, como la electrostática lineal, los sistemas hamiltonianos caóticos y la teoría de los condensados de Bose-Einstein (Malvern, 1969; Marsden y Hughes, 1983; Muskhelishvili, 1953; Sokolnikoff, 1958). Estudios recientes lograron establecer una estrecha relación entre las soluciones de este sistema y las funciones inframonogénicas del análisis de Clifford (Alfonso Santiesteban *et al.*, 2023a). En Moreno García *et al.* (2018) se ha hecho una reescritura del sistema de Lamé-Navier (10) en términos del operador de Dirac tridimensional:

$$\mathcal{L}_{\{\lambda, \mu\}}^* \vec{u} = (\frac{\mu+\lambda}{2}) \underline{\partial}_{\underline{x}}(\vec{u}) \underline{\partial}_{\underline{x}} + (\frac{3\mu+\lambda}{2}) \underline{\partial}_{\underline{x}} \underline{\partial}_{\underline{x}}(\vec{u}) = 0. \quad (11)$$

Por otra parte, en Alfonso Santiesteban *et al.* (2022b) se generaliza de una forma natural el sistema (11) para conjuntos estructurales arbitrarios. Se arribó a dos posibles generalizaciones en \mathbb{R}^3 :

$$\alpha \underline{\partial}^\psi(\vec{u}) \underline{\partial}^\psi + \beta \underline{\partial}^\varphi \underline{\partial}^\psi(\vec{u}) = 0 \quad (12)$$

y

$$\alpha \underline{\partial}^\varphi(\vec{u}) \underline{\partial}^\psi + \beta \underline{\partial}^\varphi \underline{\partial}^\psi(\vec{u}) = 0, \quad (13)$$

donde φ, ψ son dos conjuntos estructurales y para abreviar se usa la notación $\alpha = (\mu + \lambda)/2$, $\beta = (3\mu + \lambda)/2$. Como consecuencia de las restricciones de Lamé, se tendrá que $\beta > \alpha > \beta/7$. Observe que la ecuación (13) contiene el operador sándwich generalizado $\underline{\partial}^\varphi(\cdot) \underline{\partial}^\psi$ y el operador $\underline{\partial}^\varphi \underline{\partial}^\psi(\cdot)$. Como se mencionó anteriormente, las funciones que anulan este último operador también han sido estudiadas y reciben el nombre de funciones (φ, ψ) -armónicas (Serrano Ricardo *et al.*, 2021). Se introduce así la siguiente clase funcional:

$$\mathcal{H}_{\varphi, \psi}(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) : \underline{\partial}^\varphi \underline{\partial}^\psi(u) = 0\}.$$

Si los conjuntos estructurales son equivalentes, entonces la anterior clase funcional se reduce a la clase de funciones armónicas $\mathcal{H}(\Omega)$. Una de las aplicaciones del estudio de estos sistemas radica en que determinadas soluciones de los sistemas de Lamé-Navier no homogéneos son también soluciones de sistemas generalizados para ciertos conjuntos estructurales escogidos. Lo anterior permite obtener algunas de las representaciones y teoremas de descomposición descritos en Alfonso Santiesteban *et al.* (2022b).

Teorema 4

Si un campo vectorial \vec{u} satisface en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el sistema generalizado de Lamé-Navier (12), entonces este admite en Ω la descomposición única, salvo un campo vectorial en $\mathcal{H}(\Omega) \cap \mathcal{I}_{\psi,\psi}(\Omega)$, de la forma

$$\vec{u} = \vec{h} + \vec{i}, \quad (14)$$

donde $\vec{h} \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\vec{i} \in \mathcal{I}_{\psi,\psi}(\Omega)$.

Teorema 5

Sea \vec{u} que satisface a la generalización (12) en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si \vec{u} es armónico y (ψ, ψ) -inframonogénico en Ω , entonces este admite la representación única, salvo un campo vectorial en $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega) \cap \mathcal{I}_{\varphi,\psi}(\Omega)$, de la forma

$$\vec{u} = h + i, \quad (15)$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega)$ e $i \in \mathcal{I}_{\varphi,\psi}(\Omega)$.

Teorema 6

Sea \vec{u} que satisface (12) en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si \vec{u} es armónico en Ω , entonces este admite la representación única, salvo un campo vectorial en $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega) \cap \mathcal{I}_{\psi,\varphi}(\Omega)$, de la forma

$$\vec{u} = h + i^*. \quad (16)$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega)$ e $i^* \in \mathcal{I}_{\psi,\varphi}(\Omega)$.

Ejemplo 1.

El campo vectorial tridimensional

$$\vec{u}(x) = 3x_2x_3e_1 + (2x_2^2 - x_1^2 - x_3^2)e_2 + x_1e_3$$

satisface el siguiente sistema de Lamé-Navier en presencia de una fuerza de volumen constante:

$$0.1 \times \underline{\partial_x} \vec{u} \underline{\partial_x} + 0.2 \times \underline{\partial_x} \underline{\partial_x} \vec{u} = -0.8e_2$$

Si se escogen los conjuntos estructurales

$$\varphi = \{e_3, -e_1, e_2\}$$

y

$$\psi = \{e_3, e_1, e_2\}$$

se obtiene que

$$0.1 \times \underline{\partial}^\varphi \vec{u} \underline{\partial}^\psi + 0.2 \times \underline{\partial}^\varphi \underline{\partial}^\psi \vec{u} = 0.$$

Haciendo uso del Teorema 6 se arriba a la siguiente relación:

$$\vec{u}(\underline{x}) = h(\underline{x}) + i^*(\underline{x}),$$

donde

$$h(\underline{x}) = \frac{1}{3} [(x_2 + 11x_2x_3)e_1 + (5x_2^2 - 2x_3^2 - x_1^2 + x_3)e_2 + (4x_1 - x_1x_3)e_3] - x_1x_2e_1e_2e_3 \in \mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\mathbb{R}^3)$$

e

$$i^*(\underline{x}) = \frac{1}{3} [(-x_2 - 2x_2x_3)e_1 + (x_2^2 - x_3^2 - 2x_1^2 - x_3)e_2 + (x_1x_3 - x_1) - e_3] + x_1x_2e_1e_2e_3 \in \mathcal{I}_{\psi,\varphi}(\mathbb{R}^3)$$

La relación anterior representa una descomposición aditiva del vector de desplazamiento \vec{u} en términos de dos funciones que surgen naturalmente en el análisis de Clifford.

El análisis complejo es bien conocido que las funciones armónicas pueden ser descompuestas en la suma de una función holomorfa y una antiholomorfa. Sin embargo, en general, las funciones armónicas sobre álgebras de Clifford no pueden ser representadas por la suma de una función monogénica y una antimonogénica (ver Nguyen, 2015). Ante esto, resulta interesante que a través de sistemas generalizados de Lamé-Navier se puedan obtener descomposiciones aditivas de funciones armónicas, cuyas componentes son campos espinoriales esencialmente definidos en álgebras de Clifford y que generalizan a las conocidas funciones monogénicas. Este punto de vista abre el debate de discusión sobre las posibles estructuras que puede tener el vector de desplazamiento del sistema elástico.

Problemas de contorno bien planteados

En Alfonso Santiesteban *et al.* (2023b) se consideran dos problemas de frontera para un sistema elíptico de segundo orden de ecuaciones diferenciales parciales de la forma $\underline{\partial}(F_k)\underline{\partial} = f_k$ en un dominio regular y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, donde f_k es un campo k -vectorial continuo. Las condiciones de contorno contienen al producto interior y exterior de la solución k -vectorial F_k con el operador de Dirac y el vector normal n a $\partial\Omega$, provocando que dichos problemas sean bien planteados en el sentido de Hadamard. Las propiedades espectrales del operador sándwich $\underline{\partial}(\cdot)\underline{\partial}$ son tratadas utilizando la teoría de Fredholm. Por último, se muestra que las buenas propiedades obtenidas no

se satisfacen en el caso más general cuando se sustituye el operador de Dirac clásico por operadores asociados a bases ortonormales arbitrarias del espacio m -dimensional.

En general, el problema de Dirichlet para esta clase de funciones está mal planteado en el sentido de Hadamard. La condición de frontera de Dirichlet no es suficiente para garantizar un correcto planteamiento de los problemas. Por ello, Alfonso Santiesteban *et al.* (2023b) estudiaron dos problemas cuyas condiciones en la frontera del dominio sí garantizaban su buen planteamiento. Se enunciarán a continuación y se hará un breve esbozo de los principales resultados hallados. Sea f_k una función k -vectorial continua sobre el dominio Ω , se tienen los siguientes problemas:

Problema A

Encontrar en $C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) \cap C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ las soluciones de la ecuación $\underline{\partial}(F_k)\underline{\partial} = f_k$ que satisfacen las condiciones de frontera:

$$(n \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\underline{\partial} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (17)$$

Problema B

Encontrar en $C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) \cap C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ las soluciones de la ecuación $\underline{\partial}(F_k)\underline{\partial} = f_k$ que satisfacen las condiciones de frontera:

$$(n \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\underline{\partial} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (18)$$

Estos problemas se pueden interpretar como generalizaciones multidimensionales de los estudiados por Dzhuraev usando el análisis vectorial para el operador no fuertemente elíptico $\wedge \vec{u} := \text{grad}(\text{div} \vec{u}) + \text{rot}^2 \vec{u}$ (Dzhuraev, 1992). En estos problemas la condición de frontera de tipo Dirichlet y la de Neumann posibilitarán la unicidad de la solución. No obstante, una aproximación no estándar a dichos problemas arroja un mal planteamiento en general. Cabe mencionar que existen suficientes evidencias de que los problemas A y B, asociados al operador generalizado $\underline{\partial}^\varphi(\cdot)\underline{\partial}^\psi$, pueden comportarse bien planteados sobre dominios relativamente buenos como la bola unitaria, pero esta conjectura sigue estando abierta y es de interés para la comunidad matemática vinculada al análisis de Clifford.

A continuación, se tienen las fórmulas de Stokes que fueron de gran utilidad en las demostraciones presentadas en Alfonso Santiesteban *et al.* (2023b).

Teorema 7
(fórmulas de Stokes)

Sea $F_k \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$, entonces

$$\int_{\Omega} (\underline{\partial} \cdot F_k)(x) dx = \int_{\partial\Omega} (n \cdot F_k)(x) dx,$$

$$\int_{\Omega} (\underline{\partial} \wedge F_k)(x) dx = \int_{\partial\Omega} (n \wedge F_k)(x) dx,$$

donde

$$\underline{\partial} \cdot F_k = \frac{1}{2} [\underline{\partial} F_k - (-1)^k F_k \underline{\partial}]$$

y

$$\underline{\partial} \wedge F_k = \frac{1}{2} [\underline{\partial} F_k + (-1)^k F_k \underline{\partial}].$$

El siguiente teorema brinda una descomposición de Helmholtz-Hodge cuando el dominio es acotado o puede verse también como una reescritura de la fórmula de Borel-Pompeiu para campos k -vectoriales:

Teorema 8
(descomposición de
Helmholtz-Hodge)

Sea $F_k \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ un campo k -vectorial. Entonces se evidencia en Ω que

$$F_k(x) = \underline{\partial}_x \cdot [\int_{\Omega} E_1(y-x)(\underline{\partial}_y \wedge F_k)(y) dy - \int_{\partial\Omega} E_1(y-x)(n \wedge F_k)(y) dy]$$

$$+ \underline{\partial}_x \wedge [\int_{\Omega} E_1(y-x)(\underline{\partial}_y \cdot F_k)(y) dy - \int_{\partial\Omega} E_1(y-x)(n \cdot F_k)(y) dy].$$

Un hecho bien conocido del análisis vectorial es que un campo vectorial suave está determinado únicamente por su divergencia y rotacional sobre el dominio y por su componente normal o tangencial sobre la frontera (ver Gibbs y Wilson, 1947, p. 243). Un resultado análogo para el análisis de Clifford se presentará en el siguiente teorema probado por Alfonso Santiesteban *et al.* (2023b):

Teorema 9

Un campo k -vectorial suave $F_k \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ está determinado únicamente en un dominio regular y acotado Ω , cuando $\underline{\partial} \cdot F_k$ y $\underline{\partial} \wedge F_k$ son dados en Ω como también $n \cdot F_k$ o $n \wedge F_k$ sobre la frontera.

Mediante un procedimiento laborioso se obtuvo el siguiente resultado principal:

Teorema 10

Sea $f_k \in L^p(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ con $p > 1$. Entonces, los problemas A y B son únicamente solubles y sus soluciones son representadas mediante un operador integral, lineal y compacto en $L^p(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$.

El anterior resultado ofrece la posibilidad de resolver el respectivo problema espectral asociado al operador sándwich. Mediante una secuencia de razonamientos y cálculos inmediatos se pudo arribar a que las funciones propias del problema espectral son soluciones de la siguiente ecuación de Fredholm simétrica:

$$F_k(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, y) F_k(y) dy = 0,$$

donde K es un núcleo singular débil y escalar. Como se mencionó anteriormente, la aproximación no estándar a estos problemas mediante operadores de Dirac generalizados es de poco interés, en el sentido de que los problemas que se obtienen están mal planteados según Hadamard. Sin embargo, se pueden ofrecer ejemplos donde se aprecia lo interesante que resulta considerar conjuntos estructurales no equivalentes en el planteamiento de los problemas. El principal obstáculo para el buen planteamiento de los problemas asociados a diferentes conjuntos estructurales reside en que el problema de primer orden

$$\begin{cases} (\underline{\partial}^\varphi \cdot F_k)|_{\Omega} = 0, \\ (\underline{\partial}^\psi \wedge F_k)|_{\Omega} = 0, \\ F_k|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

puede poseer soluciones no triviales en Ω . No obstante, como ya se había comentado, se conjectura que, sobre dominios particulares como la bola, este sistema de primer orden sí se comporta bien planteado en el sentido de Hadamard. Note que, para conjuntos estructurales equivalentes, el anterior sistema se reduce al problema de Dirichlet para las funciones monogénicas, el cual se conoce que está bien planteado.

Descomposición de Fischer³ En 1917, el matemático vienes Ernst Fischer prueba que, dado un polinomio homogéneo de cualquier grado $q(x)$ con $x \in \mathbb{R}^m$, entonces todo polinomio homogéneo $P_k(x)$ de grado arbitrario k e independiente de la dimensión m puede ser descompuesto

³ Este apartado (Descomposición de Fischer) contiene fragmentos de Alfonso Santesteban et al. (2025).

únicamente como $P_k(x) = Q_k(x) + q(x)R(x)$, donde $Q_k(x)$ es un polinomio homogéneo de grado k que satisface la ecuación $q(\underline{\partial})Q_k(x) = 0$ y $R(x)$ es un polinomio homogéneo de un grado adecuado. Aquí, $q(\underline{\partial})$ es el operador diferencial que se tiene al reemplazar en el polinomio q cada variable x_j por la correspondiente derivada parcial ∂_{xj} (identificación de Fourier). Hoy en día, esta descomposición lleva su nombre.

Los portugueses Kähler y Vieira (2014) introdujeron en su momento un operador de Dirac fraccionario utilizando la derivada de Caputo y unas relaciones de Weyl. En Alfonso Santiesteban *et al.* (2024) se definió un nuevo operador de Dirac fraccionario construido con un conjunto estructural φ , para luego obtener una descomposición de Fischer en términos de funciones (φ, ψ) -inframonogénicas. Como consecuencia de la ausencia de commutatividad, se mostraron algunas características que difieren generalmente de las que se conocen en el clásico caso armónico. Finalmente, se probaron algunas descomposiciones mediante otras clases de funciones surgidas en el contexto del análisis de Clifford y que se vinculan estrechamente con las funciones inframonogénicas.

El operador de Dirac definido en Alfonso Santiesteban *et al.* (2024) y la variable fraccionaria generan una superálgebra de Lie isomorfa a $\text{osp}(1|2)$. La superálgebra de Lie $\text{osp}(1|2)$ está definida por tres generadores bosónicos o pares E^+ , E^- , H (que llevan estados bosónicos a estados bosónicos y estados fermiónicos a estados fermiónicos) y dos generadores fermiónicos o impares F^+ , F^- (que llevan estados bosónicos a estados fermiónicos y viceversa), sujetos a las relaciones de commutación en la base de Cartan-Weyl:

$$[H, E^\pm] = \pm E^\pm, \quad [H, F^\pm] = \pm \frac{1}{2} F^\pm, \quad [E^\pm, F^\mp] = -F^\pm,$$

$$[E^+, E^-] = 2H, \quad \{F^+, F^-\} = \frac{1}{2}H, \quad \{F^\pm, F^\pm\} = \pm \frac{1}{2}E^\pm,$$

$$[E^\pm, F^\pm] = 0.$$

Dicha superálgebra se presenta en los modelos minimales superconformes y en la cuantización de la supergravedad.

Un producto escalar $\langle ., . \rangle$ en el espacio de polinomios homogéneos de grado k , el cual se denotará por $\mathcal{P}(k)$, es definido por

$$\langle P_k, Q_k \rangle = [\overline{P_k}(\underline{\partial})Q_k]_0, \quad P_k, Q_k \in \mathcal{P}(k)$$

Este producto es conocido como “producto de Fischer” y cumple las siguientes dos propiedades importantes a causa de dos conjuntos estructurales φ y ψ :

$$\langle x_\varphi P_{k-2} x_\psi, Q_k \rangle = \langle P_{k-2}, \underline{\partial}^\varphi(Q_k) \underline{\partial}^\psi \rangle, \quad \langle x_\psi x_\varphi P_{k-2}, Q_k \rangle = \langle P_{k-2}, \underline{\partial}^\varphi \underline{\partial}^\psi(Q_k) \rangle,$$

donde $x_\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi_i x_i$, $x_\psi = \sum_{i=1}^m \psi_i x_i$ y $P_{k-2} \in \mathcal{P}(k-2)$.

Denótese por $\mathcal{I}_{\varphi,\psi}(k) \subset \mathcal{P}(k)$ al conjunto de todos los polinomios homogéneos (φ, ψ) -inframonomogénicos de grado k . El siguiente teorema brinda una descomposición de Fischer por polinomios de este tipo:

Teorema 11

Sea $k \geq 2$, entonces la siguiente descomposición se cumple:

$$\mathcal{P}(k) = \mathcal{I}_{\varphi,\psi}(k) \oplus x_\varphi \mathcal{P}(k-2) x_\psi.$$

Además, los subespacios $\mathcal{I}_{\varphi,\psi}(k)$ y $x_\varphi \mathcal{P}(k-2) x_\psi$ son ortogonales con respecto al producto de Fischer y se obtiene la siguiente descomposición completa:

$$\mathcal{P}(k) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} x_\varphi^s \mathcal{I}_{\varphi,\psi}(k-2s) x_\psi^s$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a la conocida función piso.

Sobre el producto tensorial $\mathbb{C}_m = \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}_{0,m}$, y siendo $0 < \alpha \leq 1$, se introducen los siguientes vectores fraccionarios:

$$x_\varphi^\alpha = \sum_{j=1}^m \varphi_j x_j^\alpha$$

con

$$x_j^\alpha = \begin{cases} \exp(\alpha \ln|x_j|); & x_j > 0, \\ 0; & x_j = 0, \\ \exp(\alpha \ln|x_j| + i\pi); & x_j < 0. \end{cases}$$

Remitimos al lector a consultar el trabajo preliminar de Kähler y Vieira (2014), que aborda muchas de estas ideas del análisis de Clifford fraccionario. Se define el operador de Dirac fraccionario con respecto al conjunto estructural φ de la siguiente forma:

$$\underline{\partial}_\alpha^\varphi = \sum_{j=1}^m \varphi_j {}_+^C \partial_j^\alpha$$

donde ${}^C_+\partial_j^\alpha$ denota la derivada de Caputo con respecto a x_j^α

$$\left({}^C_+\partial_j^\alpha f\right)(x^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_j^\alpha} \frac{1}{(x_j^\alpha - t)^\alpha} f'_t(x_1^\alpha, \dots, x_{j-1}^\alpha, t, x_{j+1}^\alpha, \dots, x_m^\alpha) dt.$$

Con el fin de arribar a una descomposición fraccionaria, sean las relaciones de Weyl:

$$\left[{}^C_+\partial_j^\alpha, x_j^\alpha \right] := {}^C_+\partial_j^\alpha x_j^\alpha - x_j^\alpha {}^C_+\partial_j^\alpha = \alpha \Gamma(\alpha), \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

El vector variable fraccionario x_φ^α y el operador de Dirac $\underline{\partial}_\alpha^\varphi$ generan una superálgebra de Lie finita dimensional e isomorfa a $\text{osp}(1|2)$, la cual es una extensión gradual del álgebra de Lie $\text{SL}(2)$ (matrices reales de 2×2 con traza nula con el corchete de Lie dado por el comutador, mismas que se asocian al grupo especial lineal $\text{SL}(2)$ de matrices con determinante igual a 1). Puede considerarse la más simple y ser vista como la versión supersimétrica de $\text{SL}(2)$. La versión afín de $\text{osp}(1|2)$ relacionada con los modelos minimales superconformes por el procedimiento de reducción hamiltoniana también aparece en la cuantización de la supergravedad en dos dimensiones y su versión topológica. Algunos de los modelos que surgen de esta superálgebra están ligados a las supercuerdas no-críticas de Ramond-Neveu-Schwarz con tan solo poner un ejemplo.

Denotaremos por $\Pi_\alpha(l)$ al espacio de polinomios homogéneos fraccionarios de grado l que satisfacen $\mathbb{E}^\alpha P_l = \alpha \Gamma(\alpha) l P_l$, donde $\mathbb{E}^\alpha = \sum_{i=1}^m {}^C_+\partial_i^\alpha$ es el operador fraccionario de Euler. En efecto, la renormalización

$$H^\alpha = \frac{1}{2}(\mathbb{E}^\alpha + \frac{\alpha \Gamma(\alpha)m}{2}), \quad (E^\alpha)^+ = \frac{1}{2}\alpha \Gamma(\alpha) |x_\varphi^\alpha|^2, \quad (E^\alpha)^- = -\frac{1}{2}\alpha \Gamma(\alpha) \Delta^{2\alpha}, \quad (F^\alpha)^+ = \frac{1}{2\sqrt{2}}i\alpha \Gamma(\alpha) x_\varphi^\alpha, \quad (F^\alpha)^- = \frac{1}{2\sqrt{2}}i\alpha \Gamma(\alpha) \underline{\partial}_\alpha^\varphi$$

conduce a las relaciones de commutación estándar que generan a $\text{osp}(1|2)$.

Sea ahora $\mathcal{I}_{\varphi,\psi}^\alpha(l)$ el subespacio cerrado de $\Pi_\alpha(l)$ que contiene a los polinomios (φ, ψ) -inframonogénicos fraccionarios, o sea, tales que $\underline{\partial}_\alpha^\varphi(P_l) \underline{\partial}_\alpha^\psi = 0$. Como consecuencia del análisis y del cálculo de numerosas relaciones que surgen entre el nuevo operador de Dirac y la variable fraccionaria, se obtiene el siguiente resultado que puede consultarse en Alfonso Santiesteban *et al.* (2024):

Teorema 12
(descomposición fraccionaria
de Fischer completa)

Para $l \geq 2$, la siguiente descomposición es válida:

$$\Pi_\alpha(l) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (x_\varphi^\alpha)^s \mathcal{I}_{\varphi,\psi}^\alpha(l-2s) (x_\psi^\alpha)^s.$$

A diferencia del caso armónico y monogénico, en general, los polinomios representados en la anterior descomposición no son mutuamente ortogonales con respecto al producto de Fischer. Sin embargo, sí se puede garantizar la ortogonalidad de los polinomios $(x_\varphi^\alpha)^p I_{l-2p} (x_\psi^\alpha)^p$ y $(x_\varphi^\alpha)^q I_{l-2q} (x_\psi^\alpha)^q$ para cuando $0 < p, q \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ con $|p - q| \geq 2$. Si denotamos por $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}^\alpha(l)$ al subespacio de $\Pi_\alpha(l)$ que contiene a los polinomios (φ, ψ) -armónicos fraccionarios P_l tales que $\underline{\partial}_\alpha^\varphi \underline{\partial}_\alpha^\psi (P_l) = 0$, entonces, siguiendo un procedimiento análogo, resulta otra descomposición para $l \geq 2$

$$\Pi_\alpha(l) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (x_\psi^\alpha x_\varphi^\alpha)^s \mathcal{H}_{\varphi,\psi}^\alpha(l-2s).$$

No obstante, la ortogonalidad de los polinomios en la representación anterior se pierde incluso para cuando $|p - q| \geq 2$ y $m > 2$. En el álgebra $\mathbb{R}_{0,2} \simeq \mathbb{H}(\mathbb{R})$ sí se tiene que los polinomios de la descomposición completa de Fischer son mutuamente ortogonales. Esta álgebra es muy particular y suceden estos hechos curiosos que difieren de los obtenidos para dimensiones superiores. Para profundizar en las pruebas de estos resultados se remite al lector al trabajo reciente de Alfonso Santiesteban *et al.* (2024).

Discusión de resultados

La consideración de conjuntos estructurales permite obtener una familia amplia de ecuaciones diferenciales parciales que agrupan conocidas ecuaciones de la física-matemática. Asimismo, el elevado grado de flexibilidad que supone considerar conjuntos estructurales arbitrarios posibilita agrupar, de una manera refinada, una variedad de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que tienen una estrecha relación con la ecuación de Laplace, fórmulas alternativas de Kolosov-Muskhelishvili en elasticidad lineal, transformadas de Ahlfors-Beurling, $\underline{\partial}$ -problemas y mapeos conformes (Abreu Blaya *et al.*, 2016; Alfonso Santiesteban *et al.*, 2022b; Serrano Ricardo *et al.*, 2021).

Cuando se consideran conjuntos estructurales arbitrarios, el operador sándwich generalizado $\underline{\partial}^\varphi(\cdot)\underline{\partial}^\psi$ no mantiene invariante el espacio de campos k -vectoriales como lo hace el clásico operador de Laplace y el propio operador sándwich estándar.

La ausencia de esta propiedad provoca que puedan existir funciones (φ, ψ) -inframonogénicas con algunas de sus partes k -vectoriales no (φ, ψ) -inframonogénicas.

El operador sándwich no es fuertemente elíptico, lo que implica que no se pueda aplicar el principio del máximo de Hopf y, por tanto, que en general el problema de Dirichlet asociado a las funciones que lo anulan está mal planteado en el sentido de Hadamard. A diferencia de las funciones armónicas, en las que a través de los valores en la frontera del dominio se determinan los valores del interior, para las funciones (φ, ψ) -inframonogénicas es necesario también conocer los valores de las derivadas de primer orden sobre la frontera. El planteamiento de los problemas A y B muestra cómo se pueden exigir condiciones de frontera que ayuden a establecer la unicidad de las soluciones a estos y además obtener por medio de descomposiciones de Helmholtz-Hodge las fórmulas explícitas de estas soluciones. La tipología de los problemas A y B se puede considerar para enunciar problemas de frontera relacionados con el sistema de Lamé-Navier o con ecuaciones diferenciales parciales de un orden superior a 2. No obstante, la regularidad del dominio donde se consideran estos problemas parece ser un inconveniente si se desease generalizar a dominios más generales usando el vector normal de Federer. Los métodos utilizados para demostrar el buen planteamiento de los problemas A y B no son adecuados para cualquier tipo de dominio no regular. Resulta interesante investigar cuáles serían las restricciones mínimas sobre la superficie y las clases de funciones permitidas para que estos tipos de problemas sean bien planteados.

La nueva reescritura del sistema de Lamé-Navier provee una manera de enfocar con mayor rigor algunos aspectos físicos de la ecuación de equilibrio, como los desplazamientos universales del sistema elástico, los cuales tendrán que ser armónicos e inframonogénicos a la vez. Con el uso del cálculo fraccionario se obtuvieron descomposiciones de Fischer para el espacio de polinomios homogéneos de \mathbb{R}^m , las cuales ayudan a comprender algunos conceptos inherentes de la teoría de la supersimetría en mecánica cuántica. Se pudo constatar cómo la no commutatividad del producto cliffordiano en dimensiones superiores provoca el rompimiento de los resultados obtenidos para bajas dimensiones (Alfonso Santiesteban *et al.*, 2024). Las descomposiciones de Fischer obtenidas permiten construir bases ortogonales para el espacio de polinomios (φ, ψ) -inframonogénicos y (φ, ψ) -armónicos, las cuales son de interés en la caracterización general de las componentes

de la representación aditiva del vector de desplazamiento del sistema de Lamé-Navier. El uso de las descomposiciones de Fischer obtenidas en el tratamiento de problemas de frontera para la ecuación de equilibrio es un tema que actualmente investigan los autores.

Es imprescindible señalar que las distintas descomposiciones aditivas obtenidas para el vector de desplazamiento de la ecuación de equilibrio en elasticidad lineal permiten una comprensión profunda sobre la estructura de las soluciones del sistema elástico. La descomposición de soluciones particulares de sistemas de Lamé-Navier en términos de funciones (φ, ψ) -inframonogénicas y (φ, ψ) -armónicas brinda un enfoque diferente para el estudio de la estructura del vector de desplazamiento. Utilizando las modernas técnicas no conmutativas del análisis de Clifford se generaliza el sistema de Lamé-Navier a un contexto multidimensional. La pregunta hipotética acerca de si los sistemas generalizados de Lamé-Navier estudiados modelan de forma directa a otros fenómenos físicos, dentro y fuera de la mecánica de medios continuos, sigue abierta y con optimismo se indaga en una respuesta positiva.

Conclusiones

El presente artículo ofrece un resumen de las contribuciones realizadas en el estudio de las funciones (φ, ψ) -inframonogénicas. Además de presentar una revisión y síntesis detallada sobre los resultados más característicos descubiertos para este tipo de funciones, en este trabajo se brindan algunas observaciones y preguntas abiertas no consideradas en la literatura científica hasta el momento. La naturaleza de las funciones (φ, ψ) -inframonogénicas hace que sean todavía más interesantes desde distintos puntos de vista. Sus estrechas relaciones con la ecuación de equilibrio, así como la posibilidad de encontrar descomposiciones de Fischer a través de ellas, motivan a estudiar nuevas propiedades y representaciones. La no conmutatividad del producto cliffordiano es el componente esencial que implica diferencias marcadas con las conocidas funciones armónicas. Hechos establecidos como el Principio del Módulo Máximo no se cumplen en general para las funciones (φ, ψ) -inframonogénicas. Por tanto, considerar nuevas condiciones de frontera para los problemas asociados a estos operadores elípticos (de segundo orden) abre nuevas líneas de investigación que pueden entrelazarse con la teoría de Shapiro-Lopatinskij en la búsqueda del buen planteamiento en el sentido de Hadamard.

Este trabajo está dirigido a facilitar, a los lectores interesados, una rápida comprensión del alcance y belleza de las herramientas del análisis de Clifford en el estudio de algunas ecuaciones de la física-matemática. Los artículos de Abreu Blaya et al. (2015, 2016, 2017), Alfonso Santiesteban et al. (2022a, 2022b, 2023b, 2024), Bory Reyes et al. (2016), Moreno García et al. (2017, 2018, 2020, 2022), Serrano Ricardo et al. (2021) y Alfonso Santiesteban (2024), junto con su bibliografía, han servido de base para su redacción. Los conceptos y propiedades necesarias para la total comprensión del material pueden encontrarse en las restantes referencias consideradas. La lista contiene adicionalmente algunos de los trabajos relacionados y no pretende de ningún modo estar completa.

Agradecimientos

Daniel Alfonso Santiesteban agradece a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por una Beca Nacional de Posgrado (CVU: 1043969). Juan Bory Reyes desea expresar su agradecimiento a la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional, por el financiamiento parcial recibido (SIP20141237). Agradecemos a los revisores de este trabajo por sus excelentes sugerencias y comentarios.

Declaración de interés

Los autores manifiestan que no tienen conflictos de interés.

Referencias

- Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J., Guzmán Adán, A. y Kähler, U. (2015). On some structural sets and a quaternionic (φ, ψ) -hyperholomorphic function theory. *Mathematische Nachrichten*, 288(13), 1451-1475. <https://doi.org/10.1002/mana.201300072>
- Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J., Guzmán Adán, A. y Kähler, U. (2016). On the Π -operator in Clifford analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 434(2), 1138-1159. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.09.038>
- Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J., Guzmán Adán, A. y Kähler, U. (2017). On the φ -hiperderivative of the Ψ -cauchy-type integral in Clifford analysis. *Computational Methods and Function Theory*, 17, 101-119. <https://doi.org/10.1007/s40315-016-0172-0>
- Ahlfors, L.V. (2006). *Lectures on quasiconformal mappings*. University Lectures Series, 38. American Mathematical Society. <https://book-store.ams.org/view?ProductCode=ULECT/38>
- Alfonso Santiesteban, D. (2024). $\bar{\partial}$ -problem for a second-order elliptic system in Clifford analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 47(12), 9718-9728. <https://doi.org/10.1002/mma.10090>

- Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R. y Árciga Alejandre, M.P. (2022a). On (ϕ, ψ) -inframonomogenic function in Clifford analysis. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 53, 605-621. <https://doi.org/10.1007/s00574-021-00273-6>
- Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R. y Árciga Alejandre, M.P. (2022b). On a generalized Lamé-Navier system in \mathbb{R}^3 . *Mathematica Slovaca*, 72(6), 1527-1540. <https://doi.org/10.1515/ms-2022-0104>
- Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R. y Árciga Alejandre, M.P. (2023a). Buscando estructuras en las soluciones de un sistema generalizado de Lamé-Navier. *Publicaciones e Investigación*, 17(1). <https://doi.org/10.22490/25394088.5972>
- Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R. y Bory Reyes, J. (2023b). Boundary value problems for a second-order elliptic partial differential equation system in Euclidean space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 46(14), 15784-15798. <https://doi.org/10.1002/mma.9426>
- Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R., Peña Pérez, Y. y Sigarreta Almira, J.M. (2024). Fractional Fischer decompositions by inframonomogenic functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 539(1), 128468. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128468>
- Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R., Peña Pérez, Y. y Sigarreta Almira, J.M. (2025). Descomposición de Fischer por funciones inframonomogénicas generalizadas. *Tlamatí Sabiduría*, 21, 23-29. https://tlamatí.uagro.mx/images/Archivos/Tlamatí_Vol_21_2025/Alonso-Santiesteban_et_al__2025.pdf
- Bañuelos, R. y Janakiraman, P. (2008). L^p -bounds for the Beurling-Ahlfors transform. *Transactions of the American Mathematical Society*, 360(7), 3603-3612. <https://www.ams.org/journals/tran/2008-360-07/S0002-9947-08-04537-6/S0002-9947-08-04537-6.pdf>
- Brackx, F., Delanghe, R. y Sommen, F. (1982). *Clifford analysis*. Research Notes in Mathematics, 76. Pitman Advanced Publishing Program.
- Bory Reyes, J., De Schepper, H., Guzmán Adán, A. y Sommen, F. (2016). Higher order Borel-Pompeiu representations in Clifford analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(16), 4787-4796. <https://doi.org/10.1002/mma.3798>
- Calderón, A.P. y Zygmund, A. (1954). Singular integrals and periodic functions. *Studia Mathematica*, 14(2), 249-271. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-009-1045-4_5
- Delanghe, R. (2001). Clifford analysis: history and perspective. *Computational Methods and Function Theory*, 1, 107-153. <https://doi.org/10.1007/BF03320981>
- Delanghe, R., Krausshar, R.S. y Malonek, H.R. (2001). Differentiability of functions with values in some real associative algebras: approaches to an old problem. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de*

- Liège, 70(4-5-6), 231-249.* <https://popups.ulege.be/0037-9565/index.php?id=1876&file=1&pid=1870>
- Donaldson, S.K. y Sullivan, D.P. (1989). Quasiconformal 4-manifolds. *Acta Mathematica, 163*, 181-252. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF02392736>
- Dzhuraev, A. (1992). *Methods of singular integral equations*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 60. Longman Scientific & Technical/John Wiley and Sons, Inc.
- Gakhov, F.D. (1990). *Boundary value problems*. Courier Corporation. https://books.google.com.mx/books/about/Boundary_Value_Problems.html?id=9G7sfwTDv8QC&redir_esc=y
- Gibbs, J.W. y Wilson, E.B. (1947). *Vector analysis*. Yale University Press.
- Gürlebeck, K. (1998). On some classes of Pi-operators. En J. Ryan y D. Struppa (Eds.), *Dirac operators in analysis* (pp. 41-57). Pitman Research Notes in Mathematics, 394. Pitman Longman.
- Gürlebeck, K., Kähler, U. y Shapiro, M. (1999). On the Π -operator in hyperholomorphic function theory. *Advances in Applied Clifford Algebras, 9*(1), 23-40. <https://doi.org/10.1007/BF03041935>
- Gürlebeck, K. y Nguyen, H.M. (2014). On Ψ -hyperholomorphic functions and a decomposition of harmonics. En S. Bernstein, U. Kähler, I. Sabadini y F. Sommen (Eds.), *Hypercomplex analysis: new perspectives and applications* (pp. 181-189). https://doi.org/10.1007/978-3-319-08771-9_12
- Gürlebeck, K. y Nguyen, H.M. (2015). Ψ -hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems. *AIP Conference Proceedings, 1648*(1), 440005.
- Gürlebeck, K. y Sprössig, W. (1990). *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*. Birkhäuser.
- Harrison, J. y Norton, A. (1992). The Gauss-Green theorem for fractal boundaries. *Duke Mathematical Journal, 67*(3), 575-588. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06724-X>
- Kähler, U. y Vieira, N. (2014). Fractional Clifford analysis. En S. Bernstein, U. Kähler, I. Sabadini y F. Sommen (Eds.), *Hypercomplex analysis: new perspectives and applications* (pp. 191-201). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08771-9_13
- Kats, B.A. (1983). The Riemann problem on a closed Jordan curve. *Sovremennaya Matematika, 27*(4), 83-98.
- Koriyama, H., Mae, H. y Nôno, K. (2011). Hyperholomorphic functions and holomorphic functions in quaternionic analysis. *Bulletin of Fukuoka University of Education, parte III, 60*, 1-9.
- Krausshar, R.S. y Malonek, H.R. (2001). A characterization of conformal mappings in \mathbb{R}^4 by a formal differentiability condition. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 70*(1), 35-49. <https://popups.ulege.be/0037-9565/index.php?id=1399&file=1&pid=1398>

- Lamé, G. (1837). Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, serie 1, tomo 2, 147-183.
- Liu, L.-W. y Hong, H.-K. (2018). Clifford algebra valued boundary integral equations for three-dimensional elasticity. *Applied Mathematical Modelling*, 54, 246-267. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.09.031>
- Loomis, L.H. y Sternberg, S. (1990). *Advanced calculus*. Jones and Bartlett Publishers. https://people.math.harvard.edu/~shlomo/docs/Advanced_Calculus.pdf
- Malonek, H.R, Peña Peña, D. y Sommen, F. (2010). Fischer decomposition by inframonogenic functions. *Cubo. A Mathematical Journal*, 12(2), 189-197.
- Malonek, H.R., Peña Peña, D. y Sommen, F. (2011). A Cauchy-Kowalevski theorem for inframonogenic functions. *Mathematical Journal of Okayama University*, 53, 167-172.
- Malvern, L.E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Inc.
- Marsden, J.E. y Hughes, T.J.R. (1983). *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, Inc.
- Mitelman, I.M. y Shapiro, M.V. (1995). Differentiation of the Martinelli-Bochner integrals and the notion of hyperderivability. *Mathematische Nachrichten*, 172(1), 211-238. <https://doi.org/10.1002/mana.19951720116>
- Moreno García, A., Moreno García, T. y Abreu Blaya, R. (2022). Comparing harmonic and inframonogenic functions in Clifford analysis. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 19(33). <https://doi.org/10.1007/s00009-021-01957-5>
- Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R. y Bory Reyes, J. (2017). A Cauchy integral formula for inframonogenic functions in Clifford analysis. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 27, 1147-1159. <https://doi.org/10.1007/s00006-016-0745-z>
- Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R. y Bory Reyes, J. (2018). Inframonogenic functions and their applications in 3-dimensional elasticity theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41(10), 3622-3631. <https://doi.org/10.1002/mma.4850>
- Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R. y Bory Reyes, J. (2020). Decomposition of inframonogenic functions with applications in elasticity theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(4), 1915-1924. <https://doi.org/10.1002/mma.6015>
- Muskhelishvili, N.I. (1953). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Groningen.
- Nguyen, H.M. (2015). *Ψ -hyperholomorphic function theory in \mathbb{R}^3 : geometric mapping properties and applications* [Tesis de doctorado]. Bauhaus-Universität Weimar.

- Nôno, K. (1983). Hyperholomorphic functions of a quaternion variable. *Bulletin of Fukuoka University of Education*, parte III, 32, 21-37.
- Nôno, K. (1986). On the quaternion linearization of Laplacian Δ . *Bulletin of Fukuoka University of Education*, parte III, 35, 510.
- Nôno, K. e Inenaga, Y. (1987). On the Clifford linearization of Laplacian. *Journal of the Indian Institute Sciences*, 67(5-6), 203-208.
- Shapiro, M.V. (1988). On some boundary-value problems for functions with values in Clifford algebra. *Matematički Vesnik*, 40(103), 321-326. <http://eudml.org/doc/259807>
- Shapiro, M.V. y Vasilevski, N.L. (1995). Quaternionic Ψ -hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. I. Ψ -hyperholomorphic function theory. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, 27(1), 17-46. <https://doi.org/10.1080/17476939508814803>
- Serrano Ricardo, J.L., Bory Reyes, J. y Abreu Blaya, R. (2021). Singular integral operators and a ∂ -problem for (ϕ, Ψ) -harmonic functions. *Analysis and Mathematical Physics*, 11(155). <https://doi.org/10.1007/s13324-021-00590-5>
- Sokolnikoff, I.S. (1958). *Mathematical theory of elasticity*. McGraw-Hill.
- Whitney, H. (1934). Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Transactions of the American Mathematical Society*, 36(1), 63-89.

DIGITAL CIENCIA@UAQRO



SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN
INNOVACIÓN Y POSGRADO