Generalizaciones de las funciones inframonogénicas en el análisis de Clifford

Generalizations of inframonogenic functions in Clifford analysis

Daniel Alfonso Santiesteban*
Ricardo Abreu Blaya
Universidad Autónoma de Guerrero, Guerrero, México
Juan Bory Reyes
Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México
*danielalfonso950105@gmail.com

DOI: 10.61820/dcuqa.2395-8847.1735
Fecha de recepción: 22 de septiembre del 2024
Fecha de aceptación: 18 de septiembre del 2025

Resumen

El análisis de Clifford se enfoca en las llamadas funciones monogénicas, reconocidas como generalizaciones naturales de las funciones holomorfas del plano complejo. Debido a la no conmutatividad del producto en álgebras de Clifford, surgen las funciones inframonogénicas como versión no conmutativa de las funciones armónicas. La construcción de operadores de Dirac con bases ortonormales arbitrarias de $\mathbb{R}^m$ posibilita el surgimiento de una nueva subclase de funciones biarmónicas que generalizan a las funciones inframonogénicas. En este trabajo se tratará la fórmula integral de Cauchy y un problema de salto para este tipo de funciones, así como la conexión con el sistema de Lamé-Navier. Al finalizar se mostrarán problemas de frontera bien planteados y descomposiciones de Fischer para el espacio de polinomios $\mathbb{R}^m\,[x]$.

Palabras clave: análisis de Clifford, conjuntos estructurales, funciones inframonogénicas, operador de Dirac

Abstract

Clifford analysis focuses in the so-called monogenic functions, which are recognized as natural generalizations of the holomorphic functions of the complex plane. Due to the non-commutativity of the product in Clifford algebras, the inframonogenic functions arise as a non-commutative version of the harmonic *ones. The construction of Dirac operators with arbitrary orthonormal bases of $\mathbb{R}^m$ makes possible the emergence of a new subclass of biharmonic functions that generalize to inframonogenic functions. In this work, a Cauchy integral formula and a jump problem for this type of functions will be discussed, as well as the connection with the Lamé-Navier system. At the end, well-posed boundary problems and Fischer decompositions for the polynomial space $\mathbb{R}^m[x]$ will be shown.*

Keywords: *Clifford analysis, Dirac operator, inframonogenic functions, structural sets*

Introducción[1]

El surgimiento de las álgebras de Clifford se remonta a 1876, cuando el matemático inglés William Kingdon Clifford combinó las ideas de William Rowan Hamilton con el álgebra exterior de Hermann Grassmann para introducir el famoso producto geométrico. Lamentablemente, Clifford solo vivió 33 años y no pudo divulgar la mayor parte de su obra. Allá por 1880, Rudolf Lipschitz nota que las reflexiones y rotaciones pueden ser interpretadas elegantemente usando el álgebra propuesta por Clifford. En 1913, el francés Élie Cartan se percata de que hay representaciones del grupo especial ortogonal que no son tensoriales y que tienen una estructura de álgebra de Clifford, conocidas hoy en día como "fibrados espinoriales". Hasta este momento, las ideas abstractas del álgebra no habían sido tomadas en cuenta en el campo de la física, y para 1924 se acuñó el concepto de "espín de un electrón" para explicar experimentos como el efecto Zeeman anómalo y el experimento de Stern-Gerlach. Hacia 1925, Erwin Schrödinger descubre la notoria ecuación que lleva su nombre y con la cual se describe la evolución temporal de una partícula cuántica en el espacio. Dos años más tarde, Wolfgang Pauli logra incluir el concepto de espín en la ecuación de Schrödinger mediante sus matrices sigma y encuentra la ecuación no relativista del electrón. Las matrices de Pauli generan el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,3}$, descubierta en 1913 por Cartan. Finalmente, en la búsqueda de una factorización de la ecuación de Klein-Gordon, Paul Dirac concibió un operador diferencial de la forma

$$\partial = \sum_{i=0}^{3} \gamma_i \partial_{xi} \,,$$

tal que

[1] Este apartado (Introducción) contiene fragmentos de Alfonso Santiesteban *et al.* (2025).

$$\partial^2 = \partial^2_{x_0} - \partial^2_{x_1} - \partial^2_{x_2} - \partial^2_{x_3} \,.$$

La anterior relación implicaba lo siguiente:

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1, \quad \gamma_0^2 = 1, \quad \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0 \quad \forall i \neq j \,.$$

Estas condiciones generan el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{1,3}$, la cual está asociada al álgebra del espacio-tiempo, que es esencial para comprender la geometría de la relatividad especial de Einstein. Con los trabajos de Rudolf Fueter, Grigore Moisil, David Hestenes y Richard Delanghe se constituye una subdisciplina del análisis matemático, centrada en el estudio de las soluciones nulas del operador de Dirac sobre álgebras de Clifford. En la década de 1970, el norteamericano John Ryan denominó esta subdisciplina como “análisis de Clifford”, término utilizado actualmente en la literatura científica. Las funciones inframonogénicas surgen para la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden:

$$\underline{\partial}\,(f)\,\underline{\partial} = 0 \,,$$

donde

$$\underline{\partial} := e_1\partial_{x1} + e_2\partial_{x2} + \cdots + e_m\partial_{xm}$$

denota al clásico operador de Dirac sobre $\mathbb{R}^m$ y construido con los generadores $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ del álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ (Gürlebeck y Sprössig, 1990). Estas funciones fueron originalmente introducidas por Malonek *et al*. (2010) cuando hallaron una descomposición de Fischer para el espacio de polinomios homogéneos en términos de polinomios inframonogénicos. Los polinomios obtenidos en estas descomposiciones no se comportaban ortogonales, en general, a diferencia del caso armónico. Los mismos autores también probaron un teorema de extensión de Cauchy-Kowalevski para este tipo de funciones (Malonek *et al*., 2011). Ambas aportaciones son esenciales para la construcción de bases ortonormales de espacios funcionales hipercomplejos. Investigaciones actuales (Moreno García *et al*., 2017, 2018, 2020) ofrecen interesantes conexiones y aplicaciones de las funciones inframonogénicas en elasticidad lineal.

Existen suficientes razones que justifican el interés de investigadores por estas peculiares funciones que surgen específicamente por la ausencia de la conmutatividad en el producto cliffordiano. El operador de Dirac en estas álgebras factoriza el clásico operador de Laplace en el sentido de que se cumple la relación $\underline{\partial}^2 = -\Delta$. La ecuación $\underline{\partial}^2\,(f)\,\underline{\partial} = 0$ puede ser vista como una versión no conmutativa de la conocida ecuación de Laplace. En el contexto del cálculo vectorial, la anterior ecuación sándwich restringida a campos vectoriales tridimensionales $f = \vec{u}$ puede ser reescrita como

$$grad(div\ \vec{u}) + rot^2\vec{u} = 0.$$

Puede notarse cómo la ecuación de Laplace toma la forma similar

$$grad(div\ \vec{u}) - rot^2\vec{u} = 0.$$

El cambio de signo en ambas ecuaciones provoca que la segunda de ellas, a diferencia de la primera, sea fuertemente elíptica.

Sea un conjunto $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_m\} \subset \mathbb{R}^m$. Defínase el siguiente conjunto $\overline{\Psi} := \left\{\overline{\Psi}_1, \overline{\Psi}_2, ..., \overline{\Psi}_m\right\}$. Actuando sobre $C^1\,(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$, donde Ω es un dominio abierto de $\mathbb{R}^m$, se exponen los operadores de Dirac por la izquierda y por la derecha, respectivamente, de la forma

$$\underline{\partial}\,(f) = \sum_{i=1}^{m} \Psi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (f)\,\underline{\partial}^{\Psi} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Psi_i\,. \tag{1}$$

Sea Δ el operador de Laplace m-dimensional. Es evidente que las igualdades

$$\underline{\partial}^{\Psi}\underline{\partial}^{\overline{\Psi}}\,(f) = -\underline{\partial}^{\Psi}\underline{\partial}^{\Psi}(f) = -(f)\underline{\partial}^{\Psi}\underline{\partial}^{\Psi} = (f)\underline{\partial}^{\Psi}\partial^{\overline{\Psi}} = \Delta f \tag{2}$$

se cumplen si y solo si $\Psi_i\Psi_j + \Psi_j\Psi_i = -2\delta_{i,j}$, donde $\delta_{i,j}$ denota a la delta de Kronecker. Nótese que la factorización en (2) se tiene cuando y solo cuando Ψ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. Un conjunto Ψ con esta propiedad es llamado “conjunto estructural”. Nôno (1983, 1986) y Koriyama *et al.* (2011) fueron de los primeros autores en estudiar estas generalizaciones dentro del análisis cuaterniónico y, posteriormente, en el contexto cliffordiano (Nôno e Inenaga, 1987). El término “conjunto estructural” se utiliza por vez primera relacionado con el análisis cuaterniónico en los trabajos de Mitelman y Shapiro (1995) y Shapiro y Vasilevski (1995), mientras que en un ambiente del análisis de Clifford se encuentra el trabajo de Shapiro (1988). Las funciones que anulan a estos operadores de Dirac se conocen como “funciones Ψ-hiperholomorfas”.

El uso de conjuntos estructurales arbitrarios posibilita el estudio de una gran variedad de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales. La ecuación sándwich generalizada

$$\underline{\partial}^{\varphi}(f)\,\underline{\partial}^{\Psi}=0$$

surge al considerar dos conjuntos estructurales: φ y Ψ . Las soluciones de esta ecuación son nombradas como "funciones (φ,Ψ)-inframonogénicas" (Alfonso Santiesteban *et al.*, 2022a) y representan una generalización de las ya conocidas funciones inframonogénicas. El objetivo del presente trabajo es realizar una revisión detallada de algunos de los principales resultados obtenidos en la literatura para las funciones (φ,Ψ)-inframonogénicas. Entre ellos consideraremos las representaciones integrales de Borel-Pompeiu y de Cauchy, las relaciones con la transformada de Ahlfors-Beurling, el uso de un operador de Teodorescu para resolver problemas de frontera en dominios con frontera fractal, la reescritura del sistema de Lamé-Navier, el planteamiento y resolución de dos problemas de frontera bien planteados en el sentido de Hadamard y algunas descomposiciones de Fischer. Para una discusión profunda del uso de dos bases ortonormales simultáneamente referimos al lector a Abreu Blaya *et al.* (2015, 2016, 2017) y Bory Reyes *et al.* (2016).

Metodología

Los métodos de investigación empleados en este trabajo se determinaron con base en los objetivos y las tareas de investigación planteadas. En particular fueron considerados los siguientes: histórico-lógico, análisis y síntesis, inducción y deducción, y a nivel empírico: experimental y modelación; todos de gran utilidad en el estudio de fuentes de información y el procesamiento de los fundamentos científicos. Se hace necesario el uso de un cuerpo teórico enfocado en los temas del álgebra no conmutativa, la geometría fractal, el análisis hipercomplejo y el cálculo fraccionario, que a grandes rasgos incluye el producto de Fischer, la derivada de Caputo, las relaciones de Weyl, los operadores Gamma y Euler, el operador fraccionario de Dirac sobre un fibrado espinorial, la condición de d-sumabilidad, las transformadas de Cauchy y de Teodorescu, el Π-operador, la compacidad de operadores integrales singulares sobre el espacio de funciones p-integrables, las ecuaciones integrales de tipo Fredholm y el problema espectral asociado al operador sándwich. Por ello, en la siguiente sección se introducen algunas nociones básicas relacionadas con las álgebras de Clifford y la teoría de funciones Ψ-hipercomplejas.

Nociones preliminares[2]

El álgebra real de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ se genera mediante la base canónica $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$, bajo las reglas de multiplicación: $e_i^2 = -1, e_i e_j = -e_j e_i, i, j = 1, 2, ..., m, i < j$. La ya mencionada álgebra asociativa y no conmutativa constituye el espacio lineal 2^m-dimensional generado por los k-vectores que forman los elementos de la base canónica, es decir:

$$\mathbb{R}_{0,m} = \langle 1, e_1, e_2, ..., e_m, e_1e_2, e_1e_3, ..., e_{m-1}e_m, e_1e_2e_3, ..., e_1e_2e_m \rangle.$$

Las álgebras de Clifford tienen innumerables aplicaciones, como un manejo efectivo de las rotaciones en un espacio de alta dimensión con el empleo de los llamados “grupos espinoriales”, en particular el grupo de Lorentz de la relatividad especial. Además, estas álgebras permiten reinterpretar y manipular algebraicamente muchos conceptos de interés dentro de la física teórica, la computación, el análisis y la geometría.

El espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ está inmerso en el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ al identificar cada vector $\underline{x} := (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ con el vector cliffordiano $x = \sum_{i=1}^m e_i x_i$. Cualquier elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito como $a = \sum_A a_A e_A$, donde a_A son constantes reales y A recorre todos los posibles conjuntos ordenados $A = \{1 \leq i_1 < \cdots < i_k < \cdots \leq m\}$ o $A = \emptyset$ y $e_A = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$. Note que entonces cualquier $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ se puede reescribir de forma única como $a = [a]_0 + [a]_1 + \cdots + [a]_m$, donde $[.]_k$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,m}$ en $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$. Aquí $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ denota el subespacio de k-vectores definido por $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} := span_{\mathbb{R}}(e_A : |A| = k)$. Es costumbre identificar a $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}_{0,m}^{(0)}$ (los conocidos escalares) y a $\mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)} \cong \mathbb{R}^m$ (el conjunto de vectores). Los elementos en $\mathbb{R}_{0,m}^{(2)}$ son llamados bivectores, y los elementos en $\mathbb{R}_{0,m}^{(m)}$, pseudoescalares.

El producto de un 1-vector u y un k-vector F_k estará dado por la suma de un $(k-1)$-vector y un $(k+1)$-vector:

$$uF_k = [uF_k]_{k-1} + [uF_k]_{k+1},$$

donde

$$[uF_k]_{k-1} = \frac{1}{2}\left[uF_k - (-1)^k F_k u\right] \text{ y } [uF_k]_{k+1} = \frac{1}{2}\left[uF_k + (-1)^k F_k u\right].$$

2 Este apartado (Nociones preliminares) contiene fragmentos de Alfonso Santiesteban *et al.* (2025).

Los productos interior y exterior entre u y F_k serán definidos por $u \cdot F_k := [uF_k]_{k-1}$ y $u \wedge F_k := [uF_k]_{k+1}$, respectivamente. La conjugación en $\mathbb{R}_{0,m}$ es definida como el antiautomorfismo $a \rightarrow \bar{a}$, donde $\overline{e_i} = e_i \forall i \in \{1, ..., m\}$. Una norma $\|.\|$ sobre $\mathbb{R}_{0,m}$ es definida por $\|a\|^2 = [a\bar{a}]_0$ para $a \in \mathbb{R}_{0,m}$. Observe que para $\underline{x} \in \mathbb{R}^m$ se obtiene que $\|\underline{x}\| = |\underline{x}|$, la norma euclidiana usual.

Se considerarán funciones definidas sobre dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ y con valores en $\mathbb{R}_{0,m}$. Estas funciones son escritas como $f = \sum_A f_A e_A$, donde f_A son funciones reales. Las nociones de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad tienen el usual sentido a través de todas sus componentes reales, es decir, una función f satisface una de estas propiedades si todas sus componentes reales f_A la satisfacen (Brackx *et al.*, 1982; Delanghe, 2001; Delanghe *et al.*, 2001; Liu y Hong, 2018). Recientemente, el operador de Dirac ha sido el tema central de estudio en muchas áreas de la matemática y la física-matemática. Las propiedades locales de las soluciones de este operador han conducido a la teoría de funciones conocida como “análisis de Clifford” (Gürlebeck y Nguyen, 2014; Liu y Hong, 2018).

El operador de Dirac se define como

$$\underline{\partial} := e_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + ... + e_m \frac{\partial}{\partial x_m}$$

y las funciones que este anula se llaman “funciones monogénicas”. Dicho operador juega el mismo rol en esta teoría que el clásico operador de Cauchy-Riemann para las funciones holomorfas del plano complejo. Una función que toma valores en $\mathbb{R}_{0,m}$, definida y diferenciable en un abierto Ω de $\mathbb{R}^m$, se denomina “monogénica por la izquierda (monogénica por la derecha)” en Ω si $\underline{\partial}(f) = 0((f)\underline{\partial} = 0)$ en Ω.

El operador generalizado de Dirac puede construirse considerando una base ortonormal arbitraria de $\mathbb{R}^m$ y se define de la siguiente forma:

$$\underline{\partial}^{\varphi} := \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m\}$ es dicha base. En la literatura, como se mencionó en la introducción, el término “conjunto estructural” es atribuido a estas bases ortonormales arbitrarias (Shapiro, 1988). De esta forma, se introducen las funciones φ-hiperholomorfas (por la izquierda o derecha, respectivamente) como aquellas que pertenecen a $Ker\,[\underline{\partial}^{\varphi}(.)]$ o $Ker\,[(.)\,\underline{\partial}^{\varphi}]$ Se denotará a los espacios de funciones φ-hiperholomorfas por la izquierda y por la derecha sobre un dominio Ω con las simbologías: $M_l^{\varphi}(\Omega)$

y $M_r^{\varphi}(\Omega)$, respectivamente. El operador previo también factoriza al operador de Laplace, como lo hace el de Dirac estándar.

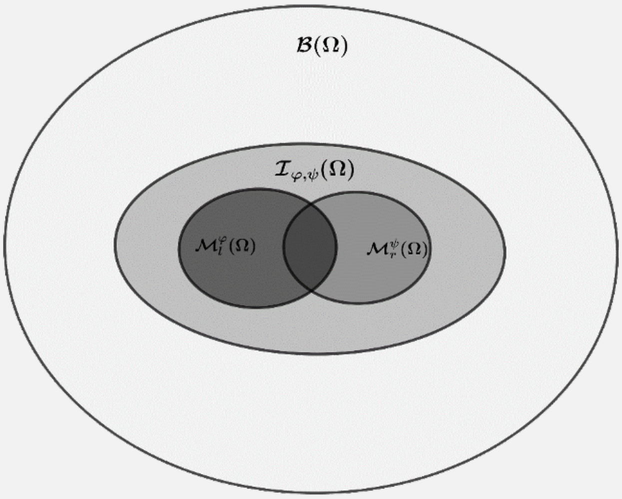
Dado otro conjunto estructural $\Psi = \{\Psi_1, \Psi_2, ..., \Psi_m\}$, recientemente se ha estudiado la siguiente subclase de funciones biarmónicas:

$$\mathfrak{I}_{\varphi,\Psi}(\Omega) = \left\{ f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) : \underline{\partial}^{\varphi}(f)\,\underline{\partial}^{\Psi} = 0 \right\},$$

las cuales son denominadas funciones (φ, Ψ)-inframonogénicas (Alfonso Santiesteban *et al.*, 2022a). Las funciones φ-hiperholomorfas por la izquierda y Ψ-hiperholomorfas por la derecha son casos particulares de funciones (φ, Ψ)-inframonogénicas. Cuando $\varphi = \Psi = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, la clase anterior se convierte en la clase de las funciones inframonogénicas, cuyas interesantes relaciones con el sistema de Lamé-Navier en elasticidad lineal y otros temas afines han sido objeto de estudio de varios investigadores (Alfonso Santiesteban, 2024; Malonek *et al.*, 2010; Moreno García *et al.*, 2018). Dichas funciones pueden verse como una versión no conmutativa de las conocidas funciones armónicas, pero se ha comprobado que existen significativas diferencias entre ambas, como que el problema de Dirichlet deja de ser bien planteado en el sentido de Hadamard (Moreno García *et al.*, 2022). Se pueden construir polinomios (φ, Ψ)-inframonogénicos sobre dominios elipsoidales tales que en la frontera se anulan. En la Figura 1 se muestran los espacios de funciones (φ, Ψ)-inframonogénicas, φ-hiperholomorfas por la izquierda, Ψ-hiperholomorfas por la derecha y biarmónicas. Este último espacio se denotará por $B(\Omega)$.

Figura 1.

Espacios de funciones (φ, Ψ)-inframonogénicas, φ-hiperholomorfas por la izquierda, Ψ-hiperholomorfas por la derecha y biarmónicas

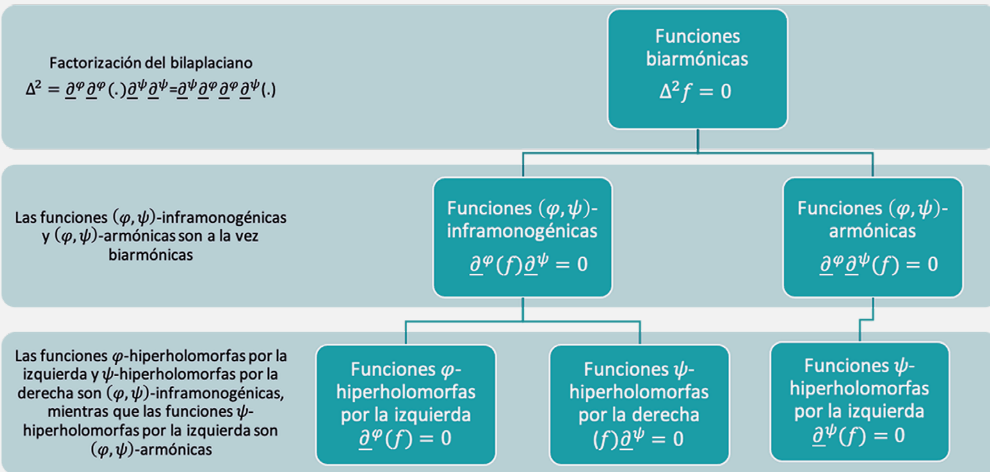


Fuente: elaboración propia

Cabe mencionar que el uso de dos conjuntos estructurales arbitrarios también posibilita el estudio de una nueva clase de funciones definidas como las soluciones de la ecuación $\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\Psi}(f) = 0$. Estas funciones se conocen como (φ, Ψ)-armónicas y constituyen asimismo un subespacio propio de las biarmónicas (Serrano Ricardo *et al.*, 2021). La utilización de conjuntos estructurales permite encontrar nuevas perspectivas en varias líneas de investigación relacionadas con mapeos M-conformes, transformadas de Ahlfors-Beurling, fórmulas alternativas de Kolosov-Muskhelishvili y descomposiciones aditivas de polinomios contragénicos. Además, con los conjuntos estructurales se pueden reconsiderar desde un punto de vista diferente muchos problemas antiguos de geometría y análisis, como el recíproco de una función monogénica y la composición de una función monogénica y una transformación de Möbius.

En el siguiente esquema se mostrarán algunas relaciones de jerarquía entre estas clases funcionales a través de la factorización del bilaplaciano mediante los operadores elípticos $\underline{\partial}^{\varphi}(.)\underline{\partial}^{\Psi}$ y $\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\Psi}(.)$.

Esquema 1.
Relaciones jerárquicas entre distintas clases funcionales



Fuente: elaboración propia

Una interesante propiedad de las funciones (φ,φ)-inframonogénicas, que también poseen las funciones armónicas, es la presentada por Alfonso Santiesteban *et al.* (2022b):

Proposición 1

Una función f es (φ,φ)-inframonogénica en Ω si y solo si cada componente k-vectorial $[f]_k$, $0 \leq k \leq m$, es (φ,φ)-inframonogénica en Ω.

Demostración

La implicación inversa se demuestra gracias a la siguiente descomposición aditiva:

$$\underline{\partial}^{\varphi}(f)\,\underline{\partial}^{\varphi} = \sum_{k=0}^{m} \underline{\partial}^{\varphi}\,[f]_k\,\underline{\partial}^{\varphi}.$$

Es evidente que, si $\underline{\partial}^{\varphi}\,[f]_k\,\underline{\partial}^{\varphi} = 0$ para todo $k \in \{0,1,\dots,m\}$, entonces $\underline{\partial}^{\varphi}(f)\underline{\partial}^{\varphi} = 0$. Para la prueba de la implicación directa se procede como sigue. La acción del operador generalizado de Dirac sobre cada componente k-vectorial de la función f puede ser vista como

$$\underline{\partial}^{\varphi}\,[f]_k = \underline{\partial}^{\varphi}\cdot[f]_k + \underline{\partial}^{\varphi}\wedge[f]_k,$$

donde

$$\underline{\partial}^{\varphi}\cdot[f]_k = \frac{1}{2}\left(\underline{\partial}^{\varphi}\,[f]_k - (-1)^k\,[f]_k\,\underline{\partial}^{\varphi}\right)$$

y

$$\underline{\partial}^{\varphi}\wedge[f]_k = \frac{1}{2}\left(\underline{\partial}^{\varphi}\,[f]_k + (-1)^k\,[f]_k\,\underline{\partial}^{\varphi}\right).$$

Mediante un cálculo sencillo se obtiene que

$$\underline{\partial}^{\varphi}\,[f]_k\,\underline{\partial}^{\varphi} = (-1)^k(\underline{\partial}^{\varphi}\cdot\underline{\partial}^{\varphi}\wedge[f]_k - \underline{\partial}^{\varphi}\wedge\underline{\partial}^{\varphi}\cdot[f]_k) \in \mathbb{R}_{0,m}^{(k)},$$

o sea, el operador $\underline{\partial}^{\varphi}(.)\underline{\partial}^{\varphi}$ transforma k-vectores en k-vectores. Si $\underline{\partial}^{\varphi} f \underline{\partial}^{\varphi} = 0$, entonces

$$\sum_{k=0}^{m} \underline{\partial}^{\varphi}\,[f]_k\,\underline{\partial}^{\varphi} = 0.$$

Como $\underline{\partial}^{\varphi}\,[f]_k\,\underline{\partial}^{\varphi} \in \mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$, entonces necesariamente $\underline{\partial}^{\varphi}\,[f]_k\,\underline{\partial}^{\varphi} = 0$ para cada $k \in \{0,1,\ldots,m\}$, lo que concluye la demostración.

Sin embargo, esta propiedad no es válida en general para conjuntos estructurales diferentes. Como un simple contraejemplo, tomemos la función $h(\underline{x}) = \left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + \sqrt{2}x_1x_2 - x_3^2\right)e_1e_2e_3 - x_3^2e_2$ y sean los siguientes dos conjuntos estructurales de $\mathbb{R}^3 : \varphi = \{e_1, e_3e_2\}$ y $\Psi = \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}(e_1+e_3), \frac{\sqrt{2}}{2}(e_3-e_1), -e_2\right\}$. Por cálculos directos es fácil comprobar que $\underline{\partial}^{\varphi}\,[h]\,\underline{\partial}\Psi = 0$, mientras que $\underline{\partial}^{\varphi}\,[h]_1\,\underline{\partial}\Psi = -2e_2 \neq 0$ y $\underline{\partial}^{\varphi}\,[h]_3\,\underline{\partial}\Psi = 2e_2 \neq 0$. No obstante, una versión débil de la propiedad enunciada en la Proposición 1 puede ser obtenida. Una función f es (φ,Ψ)-inframonogénica en Ω si y solo si sus partes par

$$f_+ = \sum_{k-par} [f]_k$$

e impar

$$f_- = \sum_{k-impar} [f]_k$$

también lo son. En el ejemplo anterior descrito evidentemente se verifica esta propiedad, ya que $h_+ = 0$ y $\underline{\partial}^{\varphi} h_- \underline{\partial}^{\Psi} = \underline{\partial}^{\varphi}\,[h]_1\,\underline{\partial}^{\Psi} + \underline{\partial}^{\varphi}\,[h]_3\,\underline{\partial}^{\Psi} = 0$.

La solución fundamental del operador $\underline{\partial}^{\Psi}$ es dada por $K_\Psi(\underline{x}) = \underline{\partial}^{\Psi}\,[E_1(\underline{x})]$, donde E_1 es la solución fundamental del laplaciano m-dimensional. Los núcleos de Cauchy generan los siguientes dos operadores integrales:

$$\left(T_\Psi^l g\right)(\underline{x}) = -\int_\Omega K_\Psi(\underline{y}-\underline{x})g(\underline{y})dV(\underline{y})$$

y

$$\left(C_{\varphi,\Psi}^l g\right)(\underline{x}) = \int_\Gamma K_\varphi(\underline{y}-\underline{x})n_\Psi(\underline{y})g(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \notin \Gamma,$$

donde Ω es un dominio abierto y simplemente conexo de $\mathbb{R}^m$ con una frontera Γ suficientemente suave, $n_\Psi(\underline{y}) = \sum_{i=1}^{m} \Psi_i n_i(\underline{y})$ y

$n_i(\underline{y})$ denota a la i-ésima componente del vector normal, unitario y exterior a Γ en el punto $\underline{y} \in \Gamma$. Los operadores anteriores son conocidos como transformadas de Teodorescu y de Cauchy, respectivamente. Cuando $\varphi = \Psi$, la segunda transformada se convierte en la transformada integral de Cauchy tradicional asociada a un conjunto estructural. Intercambiando los núcleos singulares con la función se obtienen las versiones de los operadores anteriores por la derecha. El teorema de Stokes, convenientemente usado, conecta estas transformadas de Teodorescu y de Cauchy con una transformada multidimensional de Ahlfors-Beurling definida por $\prod_{\varphi,\Psi}^{l} = \underline{\partial}^{\varphi}\left[T_{\Psi}^{l}\right]$ (Abreu Blaya *et al.*, 2016). Se introducirán los siguientes nuevos operadores:

$$\left(C_{\varphi,\Psi}^{0,r}g\right)(\underline{x}) = \int_{\Gamma} K\varphi(\underline{y}-\underline{x})n_{\varphi}(\underline{y})g(\underline{y})(\underline{y}_{\Psi}-\underline{x}_{\Psi})dS(\underline{y}), \tag{3}$$

$$\left(C_{\varphi,\Psi}^{1,r}g\right)(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m}\varphi_i\left[\int_{\Gamma} E_1(\underline{y}-\underline{x})n_{\varphi}(\underline{y})g(\underline{y}dS)(\underline{y})\right]\Psi_i, \tag{4}$$

$$\left(T_{\varphi,\Psi}^{0,r}g\right)(\underline{x}) = -\int_{\Omega} K\varphi(\underline{y}-\underline{x})g(\underline{y})(\underline{y}_{\Psi}-\underline{x}_{\Psi})dV(\underline{y}), \tag{5}$$

$$\left(T_{\varphi,\Psi}^{1,r}g\right)(\underline{x}) = -\sum_{i=1}^{m}\varphi_i\left[\int_{\Omega} E_1(\underline{y}-\underline{x})g(\underline{y})dV(\underline{y})\right]\Psi_i, \tag{6}$$

donde $n_{\varphi} = \sum_{i=1}^{m} n_i\varphi_i$, siendo n_i la i-ésima componente del vector normal, unitario y exterior sobre la frontera $\Gamma = \partial\Omega$, $\underline{y}_{\Psi} = \sum_{i=1}^{m} y_i\Psi_i$ y $\underline{x}_{\Psi} = \sum_{i=1}^{m} x_i\Psi_i$. A partir de estos se introducen los siguientes operadores:

$$C_{\varphi,\Psi}^{i,r}g = \tfrac{1}{2}(C_{\varphi,\Psi}^{0,r}g + C_{\varphi,\Psi}^{1,r}g), \qquad T_{\varphi,\Psi}^{i,r}g = \tfrac{1}{2}(T_{\varphi,\Psi}^{0,r}g + T_{\varphi,\Psi}^{1,r}g).$$

El primero de estos se identifica como una transformada de Cauchy (φ,Ψ)-inframonogénica, mientras que el segundo representa una generalización de la transformada de Teodorescu y cumple la siguiente importante relación de invertibilidad:

$$\underline{\partial}^{\varphi}(T_{\varphi,\Psi}^{i,r}g)\underline{\partial}_{\Psi} = g.$$

Se remite al lector a Alfonso Santiesteban *et al.* (2022a), donde se prueba la anterior relación. Los operadores (3), (4), (5) y (6) pueden ser concebidos cuando la función g aparece a la izquierda del núcleo y tomarían las siguientes formas:

$$\left(C_{\varphi,\Psi}^{0,l}g\right)(\underline{x}) = \int_{\Gamma}(\underline{y}_{\varphi}-\underline{x}_{\varphi})g(\underline{y})n_{\Psi}(\underline{y})K_{\Psi}(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}),$$

$$\left(C_{\varphi,\Psi}^{1,l}g\right)(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{m}\varphi_i\left[\int_{\Gamma} g(\underline{y})n_{\Psi}(\underline{y})E_1(\underline{y}-\underline{x}dS(y)\right]\Psi_i,$$

$$\left(T^{0,l}_{\varphi,\Psi}g\right)(\underline{x}) = -\int_\Omega (\underline{y}_\varphi - \underline{x}_\varphi) g(\underline{y}) K_\Psi(\underline{y}-\underline{x}) dV(\underline{y}),$$

$$\left(T^{1,l}_{\varphi,\Psi}g\right)(\underline{x}) = -\sum_{i=1}^{m} \varphi_i \left[\int_\Omega g(\underline{y}) E_1(\underline{y}-\underline{x}) dV\right] \Psi_i.$$

Las versiones por la izquierda de las transformadas de Teodorescu y de Cauchy (φ,Ψ)-inframonogénicas se definirían como

$$C^{i,l}_{\varphi,\Psi}g = \frac{1}{2}\left(C^{0,l}_{\varphi,\Psi}g + C^{1,l}_{\varphi,\Psi}g\right), \qquad T^{i,l}_{\varphi,\Psi}g = \frac{1}{2}\left(T^{0,l}_{\varphi,\Psi}g + T^{1,l}_{\varphi,\Psi}g\right).$$

Las anteriores transformadas cumplen las mismas propiedades que sus análogas por la derecha. En el desarrollo de todo el trabajo se usarán las transformadas en su versión por la derecha; compréndase que resultados similares pueden ser obtenidos si se asumen las respectivas transformadas por la izquierda.

Problema de salto

Sea Ω un dominio abierto y acotado de $\mathbb{R}^m$ con una frontera Γ suficientemente suave. Como se ha mencionado anteriormente, una función $f \in C^s(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$, $s \in \mathbb{Z}_+$, se puede representar como

$$f = \sum_A f_A e_A,$$

donde $f_A \in C^s(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R})$. Entiéndase una función real s-veces continuamente diferenciable en el cerrado $\Omega \cup \Gamma$ como aquella cuyas derivadas parciales de orden s son continuas en Ω y hasta la frontera de este dominio (Loomis y Sternberg, 1990).

En el estudio de la teoría de funciones (φ,Ψ)-inframonogénicas, una fórmula de tipo Borel-Pompeiu es un elemento fundamental. En Alfonso Santiesteban *et al.* (2022a) se demuestra la siguiente fórmula de representación integral:

Teorema 1 (fórmula de Borel-Pompeiu)

Sea $f_A \in C^s(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$. Entonces en Ω se tiene que

$$f(\underline{x}) = (C^r_\Psi)(\underline{x}) + (C^{i,r}_{\varphi,\Psi}(f)\underline{\partial}^\Psi)(\underline{x}) + (T^{i,r}_{\varphi,\Psi}\underline{\partial}^\Psi(f)\underline{\partial}^\Psi)(\underline{x}). \tag{7}$$

Para funciones (φ,Ψ)-inframonogénicas sobre Ω, la transformada de tipo Teodorescu en (7) se anula y se obtiene que los valores de la función en Ω son determinados según los valores de la función y de sus derivadas de primer orden sobre la frontera del dominio. Este resultado se muestra en el siguiente corolario que brinda una fórmula integral de tipo Cauchy para estas funciones.

Corolario 1 (fórmula integral de Cauchy)

Sea $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$ una función (φ, Ψ)-inframonogénica en Ω, entonces esta puede ser representada como

$$f(\underline{x}) = (C^r_\Psi f)(\underline{x}) + (C^{i;r}_{\varphi,\Psi}(f)\underline{\partial}^\Psi)(\underline{x}), \qquad \underline{x} \in \Omega. \tag{8}$$

La fórmula (8) permite resolver de forma inmediata el siguiente problema de salto:

$$\begin{cases} \underline{\partial}^\varphi(F)\underline{\partial}^\Psi = 0, \quad \underline{x} \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \\ F^+(\underline{x}) - F^-(\underline{x}) = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma, \\ \left[(F)\underline{\partial}^\Psi\right]^+(\underline{x}) - \left[(F)\underline{\partial}^\Psi\right]^-(\underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma, \\ F(\infty) = ((F)\underline{\partial}^\Psi)(\infty) = 0, \end{cases}$$

donde f, g se asumen como funciones de Hölder con exponente $0 < v \leq 1$ sobre Γ. Según las fórmulas de Plemelj-Sokhotski y la representación (8), se obtiene que la función

$$F(\underline{x}) = (C^r_\Psi f)(\underline{x}) + (C^{i,r}_{\varphi,\Psi} g)(\underline{x})$$

es la solución del problema de salto anterior. La unicidad de esta solución es asegurada por una combinación de los teoremas de Painlevé y de Liouville en análisis de Clifford (Brackx *et al.*, 1982). Este problema de salto es un caso específico de problema de tipo Riemann-Hilbert, cuya resolución, para casos generales, se dificulta usando el método tradicional presentado por Gakhov (1990) debido a que el operador de Dirac aparece involucrado por diferentes lados de la función.

El Π-operador complejo, o transformada de Ahlfors-Beurling, es muy utilizado en análisis complejo en la teoría de mapeos cuasiconformes en el plano. Este operador fuertemente singular se comporta isométrico sobre $L^2(\Omega)$ y, en el sentido de distribuciones, se tiene que $\Pi_\Omega\left[\partial_{\bar{z}} h(z)\right] = \partial_z h(z)$ (Ahlfors, 2006; Bañuelos y Janakiraman, 2008; Calderón y Zygmund, 1954; Donaldson y Sullivan, 1989). Cabe mencionar que algunas extensiones naturales del Π-operador complejo pueden ser concebidas utilizando la transformada de Teodorescu del análisis de Clifford (Gürlebeck, 1998; Gürlebeck *et al.*, 1999; Kraußhar y Malonek, 2001). El operador $\Pi^r_{\varphi,\Psi}$ puede ser considerado como una generalización multidimensional de Π_Ω y muchas de sus propiedades de invertibilidad y mapeo son descritas por Abreu Blaya *et al.* (2016). En nuestro contexto, este operador tiene la importante característica de que mapea $\Im_{\varphi,\Psi}(\Omega)$ sobre

$\Im_{\varphi,\Psi}(\Omega)$. Una generalización de la fórmula de Borel-Pompeiu es la demostrada por Alfonso Santiesteban *et al*. (2022a) que se presenta a continuación:

Teorema 2 Sea $f \in C^2(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$, entonces

$$\prod\nolimits_{\varphi,\Psi}^{r}[f](\underline{x}) = (C_{\varphi,\Psi}^{r} f)(\underline{x}) + (C_{\varphi,\varphi}^{i,r}(f)\underline{\partial}^{\Psi})(\underline{x}) + (T_{\varphi,\varphi}^{i,r}\underline{\partial}^{\Psi}(f)\underline{\partial}^{\Psi})(\underline{x}). \quad (9)$$

Observe que cuando la función es (φ, Ψ)-inframonogénica, se obtiene una representación de esta transformada de Ahlfors-Beurling solo mediante integrales de superficie. Por tanto, solo basta conocer los valores de la función y de sus derivadas en la frontera para conocer la transformada en todo el dominio.

A continuación, se mostrará un resultado relacionado con el problema de salto cuando el dominio tiene frontera fractal (Alfonso Santiesteban *et al*., 2022a). En este caso, la técnica de trabajo está inspirada en la utilizada por Kats (1983) para las funciones holomorfas en el plano complejo. Para ello se asume que la frontera de los dominios satisface la condición de ser d-sumable en el sentido de Harrison y Norton (1992). Una curva γ se dice que es d-sumable si la integral impropia

$$\int_0^1 N_y(\tau)\tau^{d-1}d\tau$$

converge, donde $N_y(\tau)$ representa el número mínimo de bolas de radio τ necesarias para cubrir γ. Además de ello, se asumirán las trazas del problema sobre la clase de Lipschitz de orden superior.

Sea k un entero no negativo y $0 < v < 1$. Las clases de Lipschitz de orden superior, denotadas por la notación $Lip(k+v, \gamma)$, consisten en colecciones de funciones continuas reales

$$f := \{f^j, |j| \leq k\}$$

definidas en γ tales que satisfacen las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$\left| f^{(j)}(\underline{x}) - \sum_{|j+l| \leq k} \frac{f^{(j+l)}(\underline{y})}{l!}(\underline{x} - \underline{y})^l \right| = \mathcal{O}(|\underline{x} - \underline{y}|^{k+\nu-|j|}),$$

donde $\underline{x}, \underline{y} \in \Gamma$ y $|j| \leq k$. En este caso (j) es un multiíndice y se utilizan las notaciones propias para estos. Whitney (1934) probó que tal colección de funciones puede ser extendida mediante una función de Hölder continuamente diferenciable hasta el orden k y con exponente ν.

Las nociones de conjunto d-sumable y de clases de Lipschitz de orden superior son extendidas de un modo similar al contexto multidimensional. El siguiente resultado para el problema de salto asociado a funciones (φ, ψ)-inframonogénicas es probado por Alfonso Santiesteban *et al.* (2022a):

Teorema 3 (problema de salto)

Sea $f \in Lip(1+\nu, \Gamma)$ y sea Γ d-sumable con $\nu > \frac{d}{m}$. Entonces el problema de salto

$$\begin{cases} \underline{\partial}^{\varphi}(F)\underline{\partial}^{\psi} = 0, \quad \underline{x} \in \Omega_+ \cup \Omega_-, \\ F^+(\underline{x}) - F^-(\underline{x}) = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma, \\ \left[(F)\underline{\partial}^{\psi}\right]^+(\underline{x}) - \left[(F)\underline{\partial}^{\psi}\right]^-(\underline{x}) = ((\tilde{f})\underline{\partial}^{\psi})(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma, \\ F(\infty) = ((F)\underline{\partial}^{\psi})(\infty) = 0 \end{cases}$$

tiene una solución dada por

$$F(\underline{x}) = \tilde{f}(\underline{x})\chi_{\Omega}(\underline{x}) - \mathrm{T}^{i,r}_{\varphi,\psi}\left[\underline{\partial}^{\varphi}(\tilde{f})\underline{\partial}^{\psi}\right](\underline{x}),$$

donde Ω_+ y Ω_- denotan respectivamente a los dominios interior y exterior, χ_Ω es la función característica de Ω y $\tilde{f}$ representa la extensión de Whitney para f.

La unicidad del problema de salto para el caso de dominios fractales no se puede garantizar directamente debido a que el teorema de Painlevé no es válido para tal nivel de irregularidad geométrica. Sin embargo, para el caso de dominios con frontera suave, sí es posible asegurar la unicidad de la solución dada por la fórmula integral de Cauchy, usando las fórmulas de Plemelj-Sokhotski.

Sistema de Lamé-Navier

El análisis complejo ha permitido estudiar y resolver problemas elásticos utilizando las conocidas fórmulas de Kolosov-Muskhelishvili, mientras que el análisis de Clifford ha ayudado a reinterpretar elegantemente muchas de las ecuaciones de la elasticidad lineal desde un contexto multidimensional.

Un campo de desplazamiento tridimensional $\vec{u}$ en un material elástico lineal, isótropo, homogéneo y sin fuerzas de volumen es descrito por el sistema de Lamé-Navier:

$$\mathcal{L}_{\{\lambda,\mu\}}\vec{u} = \mu\Delta\vec{u} + (\mu+\lambda)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{u}) = 0, \qquad (10)$$

donde $\mu > 0$, $\lambda > -2\mu/3$ son los coeficientes de Lamé. Este sistema fue introducido en 1837 por Gabriel Lamé en el método de separación de variables para la solución de la ecuación de onda en coordenadas elípticas (Lamé, 1837). Sus aplicaciones cubren muchas ramas, como la electrostática lineal, los sistemas hamiltonianos caóticos y la teoría de los condensados de Bose-Einstein (Malvern, 1969; Marsden y Hughes, 1983; Muskhelishvili, 1953; Sokolnikoff, 1958). Estudios recientes lograron establecer una estrecha relación entre las soluciones de este sistema y las funciones inframonogénicas del análisis de Clifford (Alfonso Santiesteban *et al.*, 2023a). En Moreno García *et al.* (2018) se ha hecho una reescritura del sistema de Lamé-Navier (10) en términos del operador de Dirac tridimensional:

$$\mathcal{L}^{*}_{\{\lambda,\mu\}}\vec{u} = (\tfrac{\mu+\lambda}{2})\underline{\partial}_{\underline{x}}(\vec{u})\underline{\partial}_{\underline{x}} + (\tfrac{3\mu+\lambda}{2})\underline{\partial}_{\underline{x}}\underline{\partial}_{\underline{x}}(\vec{u}) = 0. \tag{11}$$

Por otra parte, en Alfonso Santiesteban *et al.* (2022b) se generaliza de una forma natural el sistema (11) para conjuntos estructurales arbitrarios. Se arribó a dos posibles generalizaciones en $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha\underline{\partial}^{\psi}(\vec{u})\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi}(\vec{u}) = 0 \tag{12}$$

y

$$\alpha\underline{\partial}^{\varphi}(\vec{u})\underline{\partial}^{\psi} + \beta\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}(\vec{u}) = 0, \tag{13}$$

donde φ, ψ son dos conjuntos estructurales y para abreviar se usa la notación $\alpha = (\mu+\lambda)/2$, $\beta = (3\mu+\lambda)/2$. Como consecuencia de las restricciones de Lamé, se tendrá que $\beta > \alpha > \beta/7$. Observe que la ecuación (13) contiene el operador sándwich generalizado $\underline{\partial}^{\varphi}(.)\underline{\partial}^{\psi}$ y el operador $\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}(.)$. Como se mencionó anteriormente, las funciones que anulan este último operador también han sido estudiadas y reciben el nombre de funciones (φ,ψ)-armónicas (Serrano Ricardo *et al.*, 2021). Se introduce así la siguiente clase funcional:

$$\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega) = \left\{ \mathrm{u} \in \mathrm{C}^2(\Omega) : \underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}(u) = 0 \right\}.$$

Si los conjuntos estructurales son equivalentes, entonces la anterior clase funcional se reduce a la clase de funciones armónicas $\mathcal{H}(\Omega)$. Una de las aplicaciones del estudio de estos sistemas radica en que determinadas soluciones de los sistemas de Lamé-Navier no homogéneos son también soluciones de sistemas generalizados para ciertos conjuntos estructurales escogidos. Lo anterior permite obtener algunas de las representaciones y teoremas de descomposición descritos en Alfonso Santiesteban *et al.* (2022b).

Teorema 4

Si un campo vectorial $\vec{u}$ satisface en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el sistema generalizado de Lamé-Navier (12), entonces este admite en Ω la descomposición única, salvo un campo vectorial en $\mathcal{H}(\Omega) \cap \mathfrak{I}_{\psi,\psi}(\Omega)$, de la forma

$$\vec{u} = \vec{h} + \vec{i}\,, \tag{14}$$

donde $\vec{h} \in \mathcal{H}(\Omega)$ e $\vec{i} \in \mathfrak{I}_{\psi,\psi}(\Omega)$.

Teorema 5

Sea $\vec{u}$ que satisface a la generalización (12) en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si $\vec{u}$ es armónico y (ψ,ψ)-inframonogénico en Ω, entonces este admite la representación única, salvo un campo vectorial en $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega) \cap \mathfrak{I}_{\varphi,\psi}(\Omega)$, de la forma

$$\vec{u} = h + i, \tag{15}$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega)$ e $i \in \mathfrak{I}_{\varphi,\psi}(\Omega)$.

Teorema 6

Sea $\vec{u}$ que satisface (12) en $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Si $\vec{u}$ es armónico en Ω, entonces este admite la representación única, salvo un campo vectorial en $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega) \cap \mathfrak{I}_{\psi,\varphi}(\Omega)$, de la forma

$$\vec{u} = h + i^*. \tag{16}$$

donde $h \in \mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega)$ e $i^* \in \mathfrak{I}_{\psi,\varphi}(\Omega)$.

Ejemplo 1.

El campo vectorial tridimensional

$$\vec{u}(\underline{x}) = 3x_2x_3e_1 + (2x_2^2 - x_1^2 - x_3^2)e_2 + x_1e_3$$

satisface el siguiente sistema de Lamé-Navier en presencia de una fuerza de volumen constante:

$$0.1 \times \partial_{\underline{x}}\vec{u}\partial_{\underline{x}} + 0.2 \times \partial_{\underline{x}}\partial_{\underline{x}}\vec{u} = -0.8e_2.$$

Si se escogen los conjuntos estructurales

$$\varphi = \{e_3, -e_1, e_2\}$$

y

$$\psi = \{e_3, e_1, e_2\},$$

se obtiene que

$$0.1 \times \underline{\partial}^{\varphi} \vec{u} \underline{\partial}^{\psi} + 0.2 \times \underline{\partial}^{\varphi} \underline{\partial}^{\psi} \vec{u} = 0 \, .$$

Haciendo uso del Teorema 6 se arriba a la siguiente relación:

$$\vec{u}(\underline{x}) = h(\underline{x}) + i^{*}(\underline{x}) \, ,$$

donde

$$h(\underline{x}) = \tfrac{1}{3} \left[(x_2 + 11x_2x_3)e_1 + (5x_2^2 - 2x_3^2 - x_1^2 + x_3)e_2 + (4x_1 - x_1x_3)e_3 \right] - x_1x_2e_1e_2e_3 \in \mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\mathbb{R}^3)$$

e

$$i^{*}(\underline{x}) = \tfrac{1}{3} \left[(-x_2 - 2x_2x_3)e_1 + (x_2^2 - x_3^2 - 2x_1^2 - x_3)e_2 + (x_1x_3 - x_1) - e_3 \right] + x_1x_2e_1e_2e_3 \in \mathfrak{I}_{\psi,\varphi}(\mathbb{R}^3).$$

La relación anterior representa una descomposición aditiva del vector de desplazamiento $\vec{u}$ en términos de dos funciones que surgen naturalmente en el análisis de Clifford.

El análisis complejo es bien conocido que las funciones armónicas pueden ser descompuestas en la suma de una función holomorfa y una antiholomorfa. Sin embargo, en general, las funciones armónicas sobre álgebras de Clifford no pueden ser representadas por la suma de una función monogénica y una antimonogénica (ver Nguyen, 2015). Ante esto, resulta interesante que a través de sistemas generalizados de Lamé-Navier se puedan obtener descomposiciones aditivas de funciones armónicas, cuyas componentes son campos espinoriales esencialmente definidos en álgebras de Clifford y que generalizan a las conocidas funciones monogénicas. Este punto de vista abre el debate de discusión sobre las posibles estructuras que puede tener el vector de desplazamiento del sistema elástico.

Problemas de contorno bien planteados

En Alfonso Santiesteban *et al.* (2023b) se consideran dos problemas de frontera para un sistema elíptico de segundo orden de ecuaciones diferenciales parciales de la forma $\underline{\partial}(F_k)\underline{\partial} = f_k$ en un dominio regular y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, donde f_k es un campo k-vectorial continuo. Las condiciones de contorno contienen al producto interior y exterior de la solución k-vectorial F_k con el operador de Dirac y el vector normal n a $\partial\Omega$, provocando que dichos problemas sean bien planteados en el sentido de Hadamard. Las propiedades espectrales del operador sándwich $\underline{\partial}(\cdot)\underline{\partial}$ son tratadas utilizando la teoría de Fredholm. Por último, se muestra que las buenas propiedades obtenidas no se satisfacen en el caso más general cuando se sustituye el operador de Dirac clásico por operadores asociados a bases ortonormales arbitrarias del espacio m-dimensional.

En general, el problema de Dirichlet para esta clase de funciones está mal planteado en el sentido de Hadamard. La condición de frontera de Dirichlet no es suficiente para garantizar un correcto planteamiento de los problemas. Por ello, Alfonso Santiesteban *et al*. (2023b) estudiaron dos problemas cuyas condiciones en la frontera del dominio sí garantizaban su buen planteamiento. Se enunciarán a continuación y se hará un breve esbozo de los principales resultados hallados. Sea f_k una función k-vectorial continua sobre el dominio Ω, se tienen los siguientes problemas:

Problema A Encontrar en $C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) \cap C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ las soluciones de la ecuación $\underline{\partial}(F_k)\underline{\partial} = f_k$ que satisfacen las condiciones de frontera:

$$(n \wedge F_k)\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\underline{\partial} \cdot F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{17}$$

Problema B Encontrar en $C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) \cap C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ las soluciones de la ecuación $\underline{\partial}(F_k)\underline{\partial} = f_k$ que satisfacen las condiciones de frontera:

$$(n \cdot F_k)\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad (\underline{\partial} \wedge F_k)|_{\partial\Omega} = 0. \tag{18}$$

Estos problemas se pueden interpretar como generalizaciones multidimensionales de los estudiados por Dzhuraev usando el análisis vectorial para el operador no fuertemente elíptico $\wedge\vec{u} := \mathrm{grad}(\mathrm{div}\vec{u}) + \mathrm{rot}^2\vec{u}$ (Dzhuraev, 1992). En estos problemas la condición de frontera de tipo Dirichlet y la de Neumann posibilitarán la unicidad de la solución. No obstante, una aproximación no estándar a dichos problemas arroja un mal planteamiento en general. Cabe mencionar que existen suficientes evidencias de que los problemas A y B, asociados al operador generalizado $\underline{\partial}^{\varphi}(.)\underline{\partial}^{\psi}$, pueden comportarse bien planteados sobre dominios relativamente buenos como la bola unitaria, pero esta conjetura sigue estando abierta y es de interés para la comunidad matemática vinculada al análisis de Clifford.

A continuación, se tienen las fórmulas de Stokes que fueron de gran utilidad en las demostraciones presentadas en Alfonso Santiesteban *et al*. (2023b).

Teorema 7 (fórmulas de Stokes)

Sea $F_k \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m}^{(k)})$, entonces

$$\int_\Omega (\underline{\partial} \cdot F_k)(x)dx = \int_{\partial\Omega} (n \cdot F_k)(x)dx,$$

$$\int_\Omega (\underline{\partial} \wedge F_k)(x)dx = \int_{\partial\Omega} (n \wedge F_k)(x)dx,$$

donde

$$\underline{\partial} \cdot F_k = \frac{1}{2}\left[\underline{\partial} F_k - (-1)^k F_k \underline{\partial}\right]$$

y

$$\underline{\partial} \wedge F_k = \frac{1}{2}\left[\underline{\partial} F_k + (-1)^k F_k \underline{\partial}\right].$$

El siguiente teorema brinda una descomposición de Helmholtz-Hodge cuando el dominio es acotado o puede verse también como una reescritura de la fórmula de Borel-Pompeiu para campos k-vectoriales:

Teorema 8 (descomposición de Helmholtz-Hodge)

Sea $F_k \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m}) \cap C(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ un campo k-vectorial. Entonces se evidencia en Ω que

$$F_k(x) = \underline{\partial}_x \cdot \left[\int_\Omega E_1(y-x)(\underline{\partial}_y \wedge F_k)(y)dy - \int_{\partial\Omega} E_1(y-x)(n \wedge F_k)(y)dy\right]$$

$$+\underline{\partial}_x \wedge \left[\int_\Omega E_1(y-x)(\underline{\partial}_y \cdot F_k)(y)dy - \int_{\partial\Omega} E_1(y-x)(n \cdot F_k)(y)dy\right].$$

Un hecho bien conocido del análisis vectorial es que un campo vectorial suave está determinado únicamente por su divergencia y rotacional sobre el dominio y por su componente normal o tangencial sobre la frontera (ver Gibbs y Wilson, 1947, p. 243). Un resultado análogo para el análisis de Clifford se presentará en el siguiente teorema probado por Alfonso Santiesteban *et al.* (2023b):

Teorema 9

Un campo k-vectorial suave $F_k \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ está determinado únicamente en un dominio regular y acotado Ω, cuando $\underline{\partial} \cdot F_k$ y $\underline{\partial} \wedge F_k$ son dados en Ω como también $n \cdot F_k$ o $n \wedge F_k$ sobre la frontera.

Mediante un procedimiento laborioso se obtuvo el siguiente resultado principal:

Teorema 10 Sea $f_k \in L^p(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ con $p > 1$. Entonces, los problemas A y B son únicamente solubles y sus soluciones son representadas mediante un operador integral, lineal y compacto en $L^p(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$.

El anterior resultado ofrece la posibilidad de resolver el respectivo problema espectral asociado al operador sándwich. Mediante una secuencia de razonamientos y cálculos inmediatos se pudo arribar a que las funciones propias del problema espectral son soluciones de la siguiente ecuación de Fredholm simétrica:

$$F_k(x) - \lambda \int_\Omega K(x,y) F_k(y) dy = 0,$$

donde K es un núcleo singular débil y escalar. Como se mencionó anteriormente, la aproximación no estándar a estos problemas mediante operadores de Dirac generalizados es de poco interés, en el sentido de que los problemas que se obtienen están mal planteados según Hadamard. Sin embargo, se pueden ofrecer ejemplos donde se aprecia lo interesante que resulta considerar conjuntos estructurales no equivalentes en el planteamiento de los problemas. El principal obstáculo para el buen planteamiento de los problemas asociados a diferentes conjuntos estructurales reside en que el problema de primer orden

$$\begin{cases} (\underline{\partial}^\varphi \cdot F_k)|_\Omega = 0, \\ (\underline{\partial}^\psi \wedge F_k)|_\Omega = 0, \\ F_k|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

puede poseer soluciones no triviales en Ω. No obstante, como ya se había comentado, se conjetura que, sobre dominios particulares como la bola, este sistema de primer orden sí se comporta bien planteado en el sentido de Hadamard. Note que, para conjuntos estructurales equivalentes, el anterior sistema se reduce al problema de Dirichlet para las funciones monogénicas, el cual se conoce que está bien planteado.

Descomposición de Fischer[3]

En 1917, el matemático vienés Ernst Fischer prueba que, dado un polinomio homogéneo de cualquier grado $q(x)$ con $x \in \mathbb{R}^m$, entonces todo polinomio homogéneo $P_k(x)$ de grado arbitrario k e independiente de la dimensión m puede ser descompuesto

[3] Este apartado (Descomposición de Fischer) contiene fragmentos de Alfonso Santiesteban *et al.* (2025).

únicamente como $P_k(x) = Q_k(x) + q(x)R(x)$, donde $Q_k(x)$ es un polinomio homogéneo de grado k que satisface la ecuación $q(\underline{\partial})Q_k(x) = 0$ y $R(x)$ es un polinomio homogéneo de un grado adecuado. Aquí, $q(\underline{\partial})$ es el operador diferencial que se tiene al reemplazar en el polinomio q cada variable x_j por la correspondiente derivada parcial ∂_{xj} (identificación de Fourier). Hoy en día, esta descomposición lleva su nombre.

Los portugueses Kähler y Vieira (2014) introdujeron en su momento un operador de Dirac fraccionario utilizando la derivada de Caputo y unas relaciones de Weyl. En Alfonso Santiesteban *et al*. (2024) se definió un nuevo operador de Dirac fraccionario construido con un conjunto estructural φ, para luego obtener una descomposición de Fischer en términos de funciones (φ, ψ)-inframonogénicas. Como consecuencia de la ausencia de conmutatividad, se mostraron algunas características que difieren generalmente de las que se conocen en el clásico caso armónico. Finalmente, se probaron algunas descomposiciones mediante otras clases de funciones surgidas en el contexto del análisis de Clifford y que se vinculan estrechamente con las funciones inframonogénicas.

El operador de Dirac definido en Alfonso Santiesteban *et al*. (2024) y la variable fraccionaria generan una superálgebra de Lie isomorfa a osp $(1|2)$. La superálgebra de Lie osp $(1|2)$ está definida por tres generadores bosónicos o pares $E^+,\ E^-,\ H$ (que llevan estados bosónicos a estados bosónicos y estados fermiónicos a estados fermiónicos) y dos generadores fermiónicos o impares $F^+,\ F^-$ (que llevan estados bosónicos a estados fermiónicos y viceversa), sujetos a las relaciones de conmutación en la base de Cartan-Weyl:

$$[H, E^{\pm}] = \pm E^{\pm}, \quad [H, F^{\pm}] = \pm\tfrac{1}{2}F^{\pm}, \quad [E^{\pm}, F^{\mp}] = -F^{\pm},$$

$$[E^+, E^-] = 2H, \quad \{F^+, F^-\} = \tfrac{1}{2}H, \quad \{F^{\pm}, F^{\pm}\} = \pm\tfrac{1}{2}E^{\pm},$$

$$[E^{\pm}, F^{\pm}] = 0.$$

Dicha superálgebra se presenta en los modelos minimales superconformes y en la cuantización de la supergravedad.

Un producto escalar $\langle ., . \rangle$ en el espacio de polinomios homogéneos de grado k, el cual se denotará por $\mathcal{P}(k)$, es definido por

$$\langle P_k, Q_k \rangle = [\overline{P_k(\underline{\partial})}Q_k]_0\,, \quad P_k, Q_k \in \mathcal{P}(k)$$

Este producto es conocido como "producto de Fischer" y cumple las siguientes dos propiedades importantes a causa de dos conjuntos estructurales φ y ψ:

$$\langle x_\varphi P_{k-2} x_\psi, Q_k\rangle = \left\langle P_{k-2}, \underline{\partial}^\varphi (Q_k)\underline{\partial}^\psi \right\rangle, \quad \langle x_\psi x_\varphi P_{k-2}, Q_k\rangle = \left\langle P_{k-2}, \underline{\partial}^\varphi \underline{\partial}^\psi (Q_k)\right\rangle,$$

donde $x_\varphi = \sum_{i=1}^m \varphi_i x_i$, $x_\psi = \sum_{i=1}^m \psi_i x_i$ y $P_{k-2} \in \mathcal{P}(k-2)$. Denótese por $\mathcal{I}_{\varphi,\psi}(k) \subset \mathcal{P}(k)$ al conjunto de todos los polinomios homogéneos (φ,ψ)-inframonogénicos de grado k. El siguiente teorema brinda una descomposición de Fischer por polinomios de este tipo:

Teorema 11

Sea $k \geq 2$, entonces la siguiente descomposición se cumple:

$$\mathcal{P}(k) = \mathcal{I}_{\varphi,\psi}(k) \bigoplus x_\varphi \mathcal{P}(k-2) x_\psi.$$

Además, los subespacios $\mathcal{I}_{\varphi,\psi}(k)$ y $x_\varphi \mathcal{P}(k-2) x_\psi$ son ortogonales con respecto al producto de Fischer y se obtiene la siguiente descomposición completa:

$$\mathcal{P}(k) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} x_\varphi^s \mathcal{I}_{\varphi,\psi}(k-2s) x_\psi^s$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a la conocida función piso.

Sobre el producto tensorial $\mathbb{C}_m = \mathbb{C} \bigotimes \mathbb{R}_{0,m}$, y siendo $0 < \alpha \leq 1$, se introducen los siguientes vectores fraccionarios:

$$x_\varphi^\alpha = \sum_{j=1}^m \varphi_j x_j^\alpha$$

con

$$x_j^\alpha = \begin{cases} \exp(\alpha \ln|x_j|); & x_j > 0, \\ 0; & x_j = 0, \\ \exp(\alpha \ln|x_j| + i\alpha\pi); & x_j < 0. \end{cases}$$

Remitimos al lector a consultar el trabajo preliminar de Kähler y Vieira (2014), que aborda muchas de estas ideas del análisis de Clifford fraccionario. Se define el operador de Dirac fraccionario con respecto al conjunto estructural φ de la siguiente forma:

$$\underline{\partial}_\alpha^\varphi = \sum_{j=1}^m \varphi_j {}_{+}^{C}\partial_j^\alpha$$

donde ${}_{+}^{C}\partial_j^\alpha$ denota la derivada de Caputo con respecto a x_j^α

$$\left({}_{+}^{C}\partial_j^\alpha f\right)(x^\alpha) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{x_j^\alpha} \frac{1}{(x_j^\alpha - t)^\alpha} f_t'(x_1^\alpha, \dots, x_{j-1}^\alpha, t, x_{j+1}^\alpha, \dots, x_m^\alpha) dt.$$

Con el fin de arribar a una descomposición fraccionaria, sean las relaciones de Weyl:

$$\left[{}_{+}^{C}\partial_j^\alpha, x_j^\alpha\right] := {}_{+}^{C}\partial_j^\alpha x_j^\alpha - x_j^\alpha {}_{+}^{C}\partial_j^\alpha = \alpha\Gamma(\alpha), \quad \forall j \in \{1, \dots, m\}.$$

El vector variable fraccionario x_φ^α y el operador de Dirac $\underline{\partial}_\alpha^\varphi$ generan una superálgebra de Lie finita dimensional e isomorfa a osp$(1|2)$, la cual es una extensión gradual del álgebra de Lie SL(2) (matrices reales de 2 × 2 con traza nula con el corchete de Lie dado por el conmutador, mismas que se asocian al grupo especial lineal SL(2) de matrices con determinante igual a 1). Puede considerarse la más simple y ser vista como la versión supersimétrica de SL(2). La versión afín de osp$(1|2)$ relacionada con los modelos minimales superconformes por el procedimiento de reducción hamiltoniana también aparece en la cuantización de la supergravedad en dos dimensiones y su versión topológica. Algunos de los modelos que surgen de esta superálgebra están ligados a las supercuerdas no-críticas de Ramond-Neveu-Schwarz con tan solo poner un ejemplo.

Denotaremos por $\Pi_\alpha(l)$ al espacio de polinomios homogéneos fraccionarios de grado l que satisfacen $\mathbb{E}^\alpha P_l = \alpha\Gamma(\alpha) l P_l$, donde $\mathbb{E}^\alpha = \sum_{i=1}^m x_i^\alpha {}_{+}^{C}\partial_i^\alpha$ es el operador fraccionario de Euler. En efecto, la renormalización

$$H^\alpha = \frac{1}{2}(\mathbb{E}^\alpha + \frac{\alpha\Gamma(\alpha)m}{2}), \quad (E^\alpha)^+ = \frac{1}{2}\alpha\Gamma(\alpha)|x_\varphi^\alpha|^2, \quad (E^\alpha)^- = -\frac{1}{2}\alpha\Gamma(\alpha)\Delta^{2\alpha}, \quad (F^\alpha)^+ = \frac{1}{2\sqrt{2}} i\alpha\Gamma(\alpha) x_\varphi^\alpha, \ (F^\alpha)^- = \frac{1}{2\sqrt{2}} i\alpha\Gamma(\alpha)\underline{\partial}_\alpha^\varphi$$

conduce a las relaciones de conmutación estándar que generan a osp$(1|2)$.

Sea ahora $\mathcal{I}_{\varphi,\psi}^\alpha(l)$ el subespacio cerrado de $\Pi_\alpha(l)$ que contiene a los polinomios (φ, ψ)-inframonogénicos fraccionarios, o sea, tales que $\underline{\partial}_\alpha^\varphi(P_l)\underline{\partial}_\alpha^\psi = 0$. Como consecuencia del análisis y del cálculo de numerosas relaciones que surgen entre el nuevo operador de Dirac y la variable fraccionaria, se obtiene el siguiente resultado que puede consultarse en Alfonso Santiesteban *et al*. (2024):

Teorema 12 (descomposición fraccionaria de Fischer completa)

Para $l \geq 2$, la siguiente descomposición es válida:

$$\Pi_\alpha(l) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (x_\varphi^\alpha)^s \mathcal{I}_{\varphi,\psi}^\alpha (l-2s)(x_\psi^\alpha)^s.$$

A diferencia del caso armónico y monogénico, en general, los polinomios representados en la anterior descomposición no son mutuamente ortogonales con respecto al producto de Fischer. Sin embargo, sí se puede garantizar la ortogonalidad de los polinomios $\left(x_\varphi^\alpha\right)^p I_{l-2p}(x_\psi^\alpha)^p$ y $\left(x_\varphi^\alpha\right)^q I_{l-2q}(x_\psi^\alpha)^q$ para cuando $0 < p, q \leq \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ con $|p-q| \geq 2$. Si denotamos por $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}^\alpha(l)$ al subespacio de $\Pi_\alpha(l)$ que contiene a los polinomios (φ,ψ)-armónicos fraccionarios P_l tales que $\underline{\partial}_\alpha^\varphi \underline{\partial}_\alpha^\psi (P_l) = 0$, entonces, siguiendo un procedimiento análogo, resulta otra descomposición para $l \geq 2$:

$$\Pi_\alpha(l) = \bigoplus_{s=0}^{\lfloor \frac{l}{2} \rfloor} (x_\psi^\alpha x_\varphi^\alpha)^s \mathcal{H}_{\varphi,\psi}^\alpha (l-2s).$$

No obstante, la ortogonalidad de los polinomios en la representación anterior se pierde incluso para cuando $|p-q| \geq 2$ y $m > 2$. En el álgebra $\mathbb{R}_{0,2} \simeq \mathbb{H}(\mathbb{R})$ sí se tiene que los polinomios de la descomposición completa de Fischer son mutuamente ortogonales. Esta álgebra es muy particular y suceden estos hechos curiosos que difieren de los obtenidos para dimensiones superiores. Para profundizar en las pruebas de estos resultados se remite al lector al trabajo reciente de Alfonso Santiesteban *et al*. (2024).

Discusión de resultados

La consideración de conjuntos estructurales permite obtener una familia amplia de ecuaciones diferenciales parciales que agrupan conocidas ecuaciones de la física-matemática. Asimismo, el elevado grado de flexibilidad que supone considerar conjuntos estructurales arbitrarios posibilita agrupar, de una manera refinada, una variedad de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales que tienen una estrecha relación con la ecuación de Laplace, fórmulas alternativas de Kolosov-Muskhelishvili en elasticidad lineal, transformadas de Ahlfors-Beurling, $\underline{\partial}$-problemas y mapeos conformes (Abreu Blaya *et al.*, 2016; Alfonso Santiesteban *et al.*, 2022b; Serrano Ricardo *et al.*, 2021).

Cuando se consideran conjuntos estructurales arbitrarios, el operador sándwich generalizado $\underline{\partial}^\varphi(.)\underline{\partial}^\psi$ no mantiene invariante el espacio de campos k-vectoriales como lo hace el clásico operador de Laplace y el propio operador sándwich estándar.

La ausencia de esta propiedad provoca que puedan existir funciones (φ, ψ)-inframonogénicas con algunas de sus partes k-vectoriales no (φ, ψ)-inframonogénicas.

El operador sándwich no es fuertemente elíptico, lo que implica que no se pueda aplicar el principio del máximo de Hopf y, por tanto, que en general el problema de Dirichlet asociado a las funciones que lo anulan está mal planteado en el sentido de Hadamard. A diferencia de las funciones armónicas, en las que a través de los valores en la frontera del dominio se determinan los valores del interior, para las funciones (φ, ψ)-inframonogénicas es necesario también conocer los valores de las derivadas de primer orden sobre la frontera. El planteamiento de los problemas A y B muestra cómo se pueden exigir condiciones de frontera que ayuden a establecer la unicidad de las soluciones a estos y además obtener por medio de descomposiciones de Helmholtz-Hodge las fórmulas explícitas de estas soluciones. La tipología de los problemas A y B se puede considerar para enunciar problemas de frontera relacionados con el sistema de Lamé-Navier o con ecuaciones diferenciales parciales de un orden superior a 2. No obstante, la regularidad del dominio donde se consideran estos problemas parece ser un inconveniente si se desease generalizar a dominios más generales usando el vector normal de Federer. Los métodos utilizados para demostrar el buen planteamiento de los problemas A y B no son adecuados para cualquier tipo de dominio no regular. Resulta interesante investigar cuáles serían las restricciones mínimas sobre la superficie y las clases de funciones permitidas para que estos tipos de problemas sean bien planteados.

La nueva reescritura del sistema de Lamé-Navier provee una manera de enfocar con mayor rigor algunos aspectos físicos de la ecuación de equilibrio, como los desplazamientos universales del sistema elástico, los cuales tendrán que ser armónicos e inframonogénicos a la vez. Con el uso del cálculo fraccionario se obtuvieron descomposiciones de Fischer para el espacio de polinomios homogéneos de $\mathbb{R}^m$, las cuales ayudan a comprender algunos conceptos inherentes de la teoría de la supersimetría en mecánica cuántica. Se pudo constatar cómo la no conmutatividad del producto cliffordiano en dimensiones superiores provoca el rompimiento de los resultados obtenidos para bajas dimensiones (Alfonso Santiesteban *et al.*, 2024). Las descomposiciones de Fischer obtenidas permiten construir bases ortogonales para el espacio de polinomios (φ, ψ)-inframonogénicos y (φ, ψ)-armónicos, las cuales son de interés en la caracterización general de las componentes de la representación aditiva del vector de desplazamiento del sistema de Lamé-Navier. El uso de las descomposiciones de Fischer obtenidas en el tratamiento de problemas de frontera para la ecuación de equilibrio es un tema que actualmente investigan los autores.

Es imprescindible señalar que las distintas descomposiciones aditivas obtenidas para el vector de desplazamiento de la ecuación de equilibrio en elasticidad lineal permiten una comprensión profunda sobre la estructura de las soluciones del sistema elástico. La descomposición de soluciones particulares de sistemas de Lamé-Navier en términos de funciones (φ, ψ)-inframonogénicas y (φ, ψ)-armónicas brinda un enfoque diferente para el estudio de la estructura del vector de desplazamiento. Utilizando las modernas técnicas no conmutativas del análisis de Clifford se generaliza el sistema de Lamé-Navier a un contexto multidimensional. La pregunta hipotética acerca de si los sistemas generalizados de Lamé-Navier estudiados modelan de forma directa a otros fenómenos físicos, dentro y fuera de la mecánica de medios continuos, sigue abierta y con optimismo se indaga en una respuesta positiva.

Conclusiones

El presente artículo ofrece un resumen de las contribuciones realizadas en el estudio de las funciones (φ, ψ)-inframonogénicas. Además de presentar una revisión y síntesis detallada sobre los resultados más característicos descubiertos para este tipo de funciones, en este trabajo se brindan algunas observaciones y preguntas abiertas no consideradas en la literatura científica hasta el momento. La naturaleza de las funciones (φ, ψ)-inframonogénicas hace que sean todavía más interesantes desde distintos puntos de vista. Sus estrechas relaciones con la ecuación de equilibrio, así como la posibilidad de encontrar descomposiciones de Fischer a través de ellas, motivan a estudiar nuevas propiedades y representaciones. La no conmutatividad del producto cliffordiano es el componente esencial que implica diferencias marcadas con las conocidas funciones armónicas. Hechos establecidos como el Principio del Módulo Máximo no se cumplen en general para las funciones (φ, ψ)-inframonogénicas. Por tanto, considerar nuevas condiciones de frontera para los problemas asociados a estos operadores elípticos (de segundo orden) abre nuevas líneas de investigación que pueden entrelazarse con la teoría de Shapiro-Lopatinskij en la búsqueda del buen planteamiento en el sentido de Hadamard.

Este trabajo está dirigido a facilitar, a los lectores interesados, una rápida comprensión del alcance y belleza de las herramientas del análisis de Clifford en el estudio de algunas ecuaciones de la física-matemática. Los artículos de Abreu Blaya *et al*. (2015, 2016, 2017), Alfonso Santiesteban *et al*. (2022a, 2022b, 2023b, 2024), Bory Reyes *et al*. (2016), Moreno García *et al*. (2017, 2018, 2020, 2022), Serrano Ricardo *et al*. (2021) y Alfonso Santiesteban (2024), junto con su bibliografía, han servido de base para su redacción. Los conceptos y propiedades necesarias para la total comprensión del material pueden encontrarse en las restantes referencias consideradas. La lista contiene adicionalmente algunos de los trabajos relacionados y no pretende de ningún modo estar completa.

Agradecimientos

Daniel Alfonso Santiesteban agradece a la Secretaría de Ciencia, Humanidades, Tecnología e Innovación (SECIHTI) por una Beca Nacional de Posgrado (CVU: 1043969). Juan Bory Reyes desea expresar su agradecimiento a la Secretaría de Investigación y Posgrado del Instituto Politécnico Nacional, por el financiamiento parcial recibido (SIP20141237). Agradecemos a los revisores de este trabajo por sus excelentes sugerencias y comentarios.

Declaración de interés

Los autores manifiestan que no tienen conflictos de interés.

Referencias

Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J., Guzmán Adán, A. y Kaehler, U. (2015). On some structural sets and a quaternionic (φ,ψ)-hyperholomorphic function theory. *Mathematische Nachrichten, 288*(13), 1451-1475. https://doi.org/10.1002/mana.201300072

Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J., Guzmán Adán, A. y Kähler, U. (2016). On the Π-operator in Clifford analysis. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 434*(2), 1138-1159. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.09.038

Abreu Blaya, R., Bory Reyes, J., Guzmán Adán, A. y Kähler, U. (2017). On the φ-hiperderivative of the Ψ-cauchy-type integral in Clifford analysis. *Computational Methods and Function Theory, 17*, 101-119. https://doi.org/10.1007/s40315-016-0172-0

Ahlfors, L.V. (2006). *Lectures on quasiconformal mappings*. University Lectures Series, 38. American Mathematical Society. https://bookstore.ams.org/view?ProductCode=ULECT/38

Alfonso Santiesteban, D. (2024). $\overline{\partial}$-problem for a second-order elliptic system in Clifford analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 47*(12), 9718-9728. https://doi.org/10.1002/mma.10090

Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R. y Árciga Alejandre, M.P. (2022a). On (ϕ, ψ)-inframonogenic function in Clifford analysis. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, 53*, 605-621. https://doi.org/10.1007/s00574-021-00273-6

Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R. y Árciga Alejandre, M.P. (2022b). On a generalized Lamé-Navier system in $\mathbb{R}^3$. *Mathematica Slovaca, 72*(6), 1527-1540. https://doi.org/10.1515/ms-2022-0104

Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R. y Árciga Alejandre, M.P. (2023a). Buscando estructuras en las soluciones de un sistema generalizado de Lamé-Navier. *Publicaciones e Investigación, 17*(1). https://doi.org/10.22490/25394088.5972

Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R. y Bory Reyes, J. (2023b). Boundary value problems for a second-order elliptic partial differential equation system in Euclidean space. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 46*(14), 15784-15798. https://doi.org/10.1002/mma.9426

Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R., Peña Pérez, Y. y Sigarreta Almira, J.M. (2024). Fractional Fischer decompositions by inframonogenic functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 539*(1), 128468. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128468

Alfonso Santiesteban, D., Abreu Blaya, R., Peña Pérez, Y. y Sigarreta Almira, J.M. (2025). Descomposición de Fischer por funciones inframonogénicas generalizadas. *Tlamati Sabiduría, 21*, 23-29. https://tlamati.uagro.mx/images/Archivos/Tlamati_Vol_21_2025/Alonso-Santiesteban_et_al__2025.pdf

Bañuelos, R. y Janakiraman, P. (2008). L^p-bounds for the Beurling-Ahlfors transform. *Transactions of the American Mathematical Society, 360*(7), 3603-3612. https://www.ams.org/journals/tran/2008-360-07/S0002-9947-08-04537-6/S0002-9947-08-04537-6.pdf

Brackx, F., Delanghe, R. y Sommen, F. (1982). *Clifford analysis*. Research Notes in Mathematics, 76. Pitman Advanced Publishing Program.

Bory Reyes, J., De Schepper, H., Guzmán Adán, A. y Sommen, F. (2016). Higher order Borel-Pompeiu representations in Clifford analysis. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 39*(16), 4787-4796. https://doi.org/10.1002/mma.3798

Calderón, A.P. y Zygmund, A. (1954). Singular integrals and periodic functions. *Studia Mathematica, 14*(2), 249-271. https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-009-1045-4_5

Delanghe, R. (2001). Clifford analysis: history and perspective. *Computational Methods and Function Theory, 1*, 107-153. https://doi.org/10.1007/BF03320981

Delanghe, R., Krausshar, R.S. y Malonek, H.R. (2001). Differentiability of functions with values in some real associative algebras: approaches to an old problem. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de*

Liège, 70(4-5-6), 231-249. https://popups.uliege.be/0037-9565/index.php?id=1876&file=1&pid=1870

Donaldson, S.K. y Sullivan, D.P. (1989). Quasiconformal 4-manifolds. *Acta Mathematica, 163*, 181-252. https://link.springer.com/article/10.1007/BF02392736

Dzhuraev, A. (1992). *Methods of singular integral equations*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 60. Longman Scientific & Technical/John Wiley and Sons, Inc.

Gakhov, F.D. (1990). *Boundary value problems*. Courier Corporation. https://books.google.com.mx/books/about/Boundary_Value_Problems.html?id=9G7sfwTDv8QC&redir_esc=y

Gibbs, J.W. y Wilson, E.B. (1947). *Vector analysis*. Yale University Press.

Gürlebeck, K. (1998). On some classes of Pi-operators. En J. Ryan y D. Struppa (Eds.), *Dirac operators in analysis* (pp. 41-57). Pitman Research Notes in Mathematics, 394. Pitman Longman.

Gürlebeck, K., Kähler, U. y Shapiro, M. (1999). On the Π-operator in hyperholomorphic function theory. *Advances in Applied Clifford Algebras, 9*(1), 23-40. https://doi.org/10.1007/BF03041935

Gürlebeck, K. y Nguyen, H.M. (2014). On Ψ-hyperholomorphic functions and a decomposition of harmonics. En S. Bernstein, U. Kähler, I. Sabadini y F. Sommen (Eds.), *Hypercomplex analysis: new perspectives and applications* (pp. 181-189). https://doi.org/10.1007/978-3-319-08771-9_12

Gürlebeck, K. y Nguyen, H.M. (2015). Ψ-hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems. *AIP Conference Proceedings, 1648*(1), 440005.

Gürlebeck, K. y Sprössig, W. (1990). *Quaternionic analysis and elliptic boundary value problems*. Birkhäuser.

Harrison, J. y Norton, A. (1992). The Gauss-Green theorem for fractal boundaries. *Duke Mathematical Journal, 67*(3), 575-588. https://doi.org/10.1215/S0012-7094-92-06724-X

Kähler, U. y Vieira, N. (2014). Fractional Clifford analysis. En S. Bernstein, U. Kähler, I. Sabadini y F. Sommen (Eds.), *Hypercomplex analysis: new perspectives and applications* (pp. 191-201). Birkhäuser. https://doi.org/10.1007/978-3-319-08771-9_13

Kats, B.A. (1983). The Riemann problem on a closed Jordan curve. *Sovremennaya Mathematika, 27*(4), 83-98.

Koriyama, H., Mae, H. y Nôno, K. (2011). Hyperholomorphic functions and holomorphic functions in quaternionic analysis. *Bulletin of Fukuoka University of Education, parte III, 60*, 1-9.

Kraußhar, R.S. y Malonek, H.R. (2001). A characterization of conformal mappings in $\mathbb{R}^4$ by a formal differentiability condition. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège, 70*(1), 35-49. https://popups.uliege.be/0037-9565/index.php?id=1399&file=1&pid=1398

Lamé, G. (1837). Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, serie 1, tomo 2, 147-183.

Liu, L.-W. y Hong, H.-K. (2018). Clifford algebra valued boundary integral equations for three-dimensional elasticity. *Applied Mathematical Modelling, 54*, 246-267. https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.09.031

Loomis, L.H. y Sternberg, S. (1990). *Advanced calculus*. Jones and Bartlett Publishers. https://people.math.harvard.edu/~shlomo/docs/Advanced_Calculus.pdf

Malonek, H.R, Peña Peña, D. y Sommen, F. (2010). Fischer decomposition by inframonogenic functions. *Cubo. A Mathematical Journal, 12*(2), 189-197.

Malonek, H.R., Peña Peña, D. y Sommen, F. (2011). A Cauchy-Kowalevski theorem for inframonogenic functions. *Mathematical Journal of Okayama University, 53*, 167-172.

Malvern, L.E. (1969). *Introduction to the mechanics of a continuous medium*. Prentice-Hall, Inc.

Marsden, J.E. y Hughes, T.J.R. (1983). *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, Inc.

Mitelman, I.M. y Shapiro, M.V. (1995). Differentiation of the Martinelli-Bochner integrals and the notion of hyperderivability. *Mathematische Nachrichten, 172*(1), 211-238. https://doi.org/10.1002/mana.19951720116

Moreno García, A., Moreno García, T. y Abreu Blaya, R. (2022). Comparing harmonic and inframonogenic functions in Clifford analysis. *Mediterranean Journal of Mathematics, 19*(33). https://doi.org/10.1007/s00009-021-01957-5

Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R. y Bory Reyes, J. (2017). A Cauchy integral formula for inframonogenic functions in Clifford analysis. *Advances in Applied Clifford Algebras, 27*, 1147-1159. https://doi.org/10.1007/s00006-016-0745-z

Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R. y Bory Reyes, J. (2018). Inframonogenic functions and their applications in 3-dimensional elasticity theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41*(10), 3622-3631. https://doi.org/10.1002/mma.4850

Moreno García, A., Moreno García, T., Abreu Blaya, R. y Bory Reyes, J. (2020). Decomposition of inframonogenic functions with applications in elasticity theory. *Mathematical Methods in the Applied Sciences, 43*(4), 1915-1924. https://doi.org/10.1002/mma.6015

Muskhelishvili, N.I. (1953). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Groningen.

Nguyen, H.M. (2015). *Ψ-hyperholomorphic function theory in $\mathbb{R}^3$: geometric mapping properties and applications* [Tesis de doctorado]. Bauhaus-Universität Weimar.

Nôno, K. (1983). Hyperholomorphic functions of a quaternion variable. *Bulletin of Fukuoka University of Education*, parte III, *32*, 21-37.

Nôno, K. (1986). On the quaternion linearization of Laplacian Δ. *Bulletin of Fukuoka University of Education*, parte III, *35*, 510.

Nôno, K. e Inenaga, Y. (1987). On the Clifford linearization of Laplacian. *Journal of the Indian Institute Sciences, 67*(5-6), 203-208.

Shapiro, M.V. (1988). On some boundary-value problems for functions with values in Clifford algebra. *Matematički Vesnik, 40*(103), 321-326. http://eudml.org/doc/259807

Shapiro, M.V. y Vasilevski, N.L. (1995). Quaternionic Ψ-hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. I. Ψ-hyperholomorphic function theory. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal, 27*(1), 17-46. https://doi.org/10.1080/17476939508814803

Serrano Ricardo, J.L., Bory Reyes, J. y Abreu Blaya, R. (2021). Singular integral operators and a ∂-problem for (ϕ, Ψ)-harmonic functions. *Analysis and Mathematical Physics, 11*(155). https://doi.org/10.1007/s13324-021-00590-5

Sokolnikoff, I.S. (1958). *Mathematical theory of elasticity*. McGraw-Hill.

Whitney, H. (1934). Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets. *Transactions of the American Mathematical Society, 36*(1), 63-89.